

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRÓNOMOS

Departamento de Ingeniería Rural

RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS Y DESEQUILIBRADOS

AUTORES:

José Andrés Sancho Llerandi

Rosa María Benavente León

Madrid, Mayo de 2001

INTRODUCCIÓN

Esta publicación consiste en una serie de circuitos trifásicos, que se corresponden con las enseñanzas impartidas en la asignatura “Electrotecnia” de 2º curso en el plan de estudios 1996 de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Madrid, y que han sido elaborados por los profesores del Departamento de Ingeniería Rural de la UPM, D. José Andrés Sancho Llerandi y Dña. Rosa María Benavente León.

Se han incluido circuitos trifásicos equilibrados y desequilibrados, para familiarizar al alumno en la resolución de los mismos.

El texto ha incluido algunos modelos que se explican en clases teóricas con objeto de facilitar la labor personal del alumno.

Los ejercicios se han clasificado en orden creciente de dificultad con objeto de que el alumno se habitúe de forma progresiva en la resolución de los mismos, y permitiendo que pueda volver a repasar los contenidos teóricos cuando encuentre dificultades en su comprensión.

Es nuestro deseo que con esta publicación se facilite el seguimiento de la asignatura y se adquieran los conocimientos en materia de circuitos trifásicos necesarios para poder proyectar una instalación eléctrica de baja tensión.

Madrid, Mayo de 2001

Los autores.

RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS Y DESEQUILIBRADOS

PROBLEMA Nº 1

Los valores instantáneos de tres fuerzas electromotrices están definidos por las ecuaciones siguientes:

$$e_1' = E_o' \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

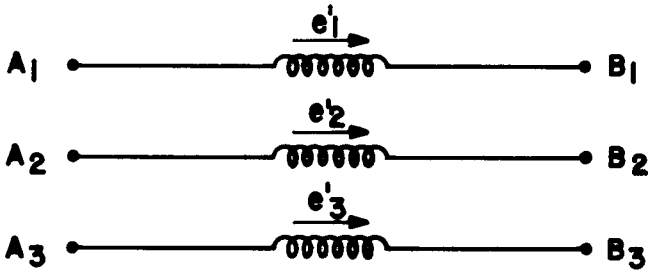
$$e_2' = E_o' \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$$

$$e_3' = E_o' \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)$$

Suponiendo que se conectan en estrella, determinar las ecuaciones que definen las tres fuerzas electromotrices que se obtienen entre los tres bornes de salida.

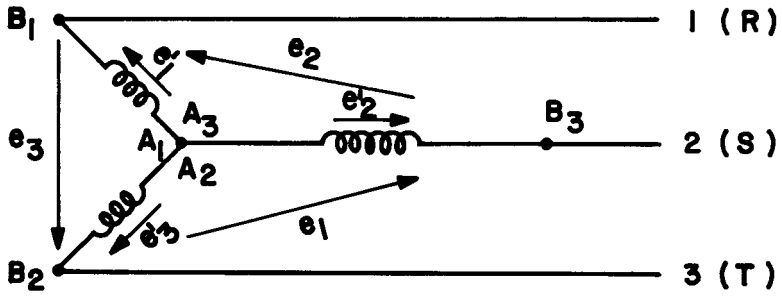
Solución

Las tres ecuaciones del enunciado corresponden a tres generadores monofásicos A_1-B_1, A_2-B_2 y A_3-B_3, que se pueden representar esquemáticamente como:



donde A_1, A_2 y A_3 son los tres bornes de menor potencial y B_1, B_2 y B_3 los de mayor potencial.

Si se unen A_1, A_2 y A_3 en un solo punto y B_1, B_2 y B_3 se conectan a la línea trifásica 1, 2 y 3 o R, S y T, se obtiene la conexión en estrella.



Entre los tres bornes de salida B_2-B_3, B_3-B_1 y B_1-B_2 existen tres fuerzas electromotrices compuestas o de línea e_1, e_2 y e_3, respectivamente.

Las expresiones que relacionan las tres fuerzas electromotrices compuestas o de línea con las simples o estrelladas e_1', e_2' y e_3', son:

$$e_1 = e_{B_2-B_3} = e_{B_2-A_3} + e_{A_3-B_3} = -e_3' + e_2'$$

$$e_2 = e_{B_3-B_1} = e_{B_3-A_1} + e_{A_1-B_1} = -e_1' + e_3'$$

$$e_3 = e_{B_1-B_2} = e_{B_1-A_2} + e_{A_2-B_2} = -e_2' + e_1'$$

Es decir:

$$e_1 = e_2' - e_3'$$

$$e_2 = e_3' - e_1'$$

$$e_3 = e_1' - e_2'$$

expresiones fáciles de calcular por permutación circular 1,2,3.

Sustituyendo las expresiones dadas en el enunciado en las tres ecuaciones anteriores, se obtienen los valores instantáneos de las tres fuerzas electromotrices compuestas:

$$e_1 = E_o' \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - E_o' \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)$$

$$e_2 = E_o' \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{4 \cdot \pi}{3}\right) - E_o' \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$e_1 = E_o' \cdot \cos(\omega \cdot t) - E_o' \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$$

Operando:

$$e_1 = E_o' \cdot \left(\cos(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) - \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) \right)$$

$$e_1 = E_o' \cdot \left[\cos(\omega \cdot t) \cdot \left(\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) \right) + \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \cdot \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) \right) \right]$$

$$e_1 = E_o' \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \cdot \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) \right)$$

$$e_1 = 2 \cdot E_o' \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$$

$$e_1 = \sqrt{3} \cdot E_o' \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t)$$

$$e_1 = \sqrt{3} \cdot E_o' \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Análogamente:

$$e_2 = E_o' \cdot \left(\cos(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) + \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) - \cos(\omega \cdot t) \right)$$

$$e_2 = E_o' \cdot \left[\cos(\omega \cdot t) \cdot \left(\cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) - 1 \right) + \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4 \cdot \pi}{3}\right) \right]$$

$$e_2 = E_o' \cdot \left(-1.5 \cdot \cos(\omega \cdot t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \right)$$

$$e_2 = \sqrt{3} \cdot E_o' \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \right)$$

$$e_2 = \sqrt{3} \cdot E_o' \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right)$$

Y:

$$e_3 = E_o' \cdot \left(\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \right)$$

$$e_3 = E_o' \cdot \left[\cos(\omega \cdot t) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \right) - \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \right]$$

$$e_3 = E_o' \cdot \left(1.5 \cdot \cos(\omega \cdot t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \right)$$

$$e_3 = \sqrt{3} \cdot E_o' \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \right)$$

$$e_3 = \sqrt{3} \cdot E_o' \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Por lo tanto las tres fuerzas electromotrices compuestas cumplen las siguientes condiciones:

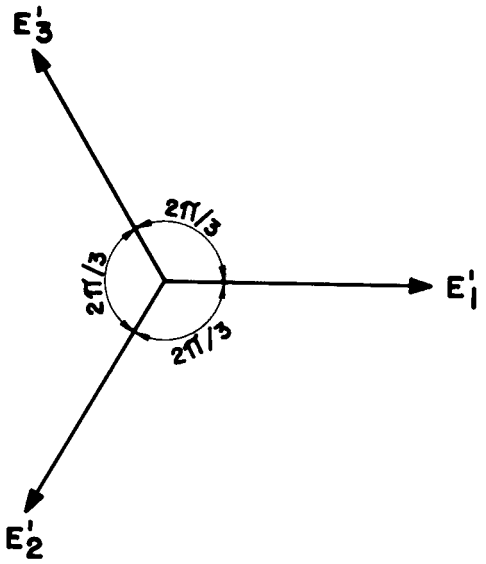
- tienen igual pulsación que las simples.
- su valor máximo es $\sqrt{3}$ veces mayor que el de las simples.
- están desfasadas entre sí $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ radianes.
- están retrasadas $\frac{\pi}{2}$ radianes respecto de las simples de igual subíndice.

PROBLEMA Nº 2

Realizar el problema anterior utilizando valores eficaces y representación vectorial.

Solución

La representación mediante el diagrama rotatorio de las expresiones cosenoidales anteriores es:



cuyos módulos valen:

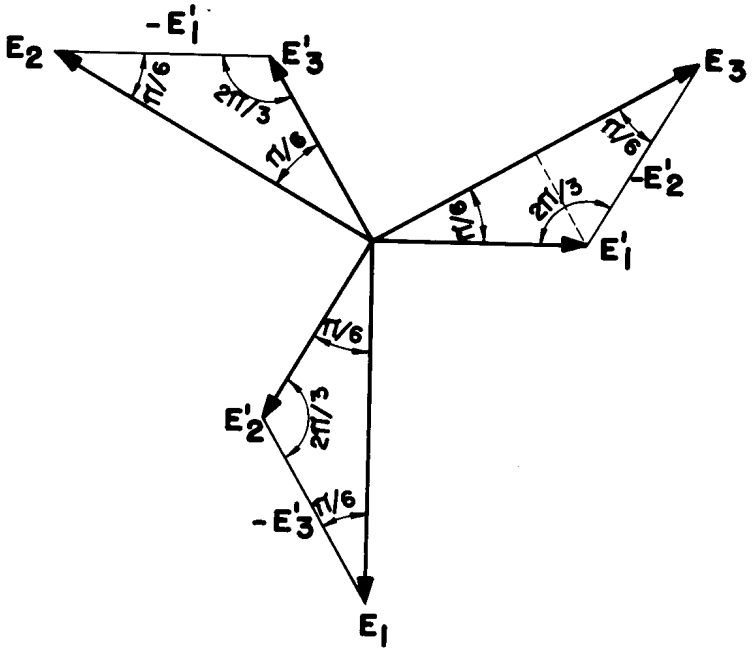
$$E_1' = E_2' = E_3' = \frac{E_o'}{\sqrt{2}}$$

Las tres fuerzas electromotrices compuestas o de línea están relacionadas con las simples por las siguientes ecuaciones, obtenidas pasando a valores eficaces las ecuaciones instantáneas formuladas en el ejercicio anterior:

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_2' - \bar{E}_3'$$

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_3' - \bar{E}_1'$$
$$\bar{E}_3 = \bar{E}_1' - \bar{E}_2'$$

Si utilizando el diagrama rotatorio se efectúan las tres sumas vectoriales anteriores, se obtienen gráficamente los tres vectores que definen las fuerzas electromotrices compuestas.



Los tres triángulos formados por dos tensiones simples y una compuesta son iguales e isósceles. Por lo tanto, de la figura anterior se deduce que:

$$E_1' = E_2' = E_3' = E'$$
$$E_1 = E_2 = E_3 = E$$
$$E = 2 \cdot E' \cdot \cos\frac{\pi}{6}$$
$$E = \sqrt{3} \cdot E'$$

Es decir, las tres fuerzas electromotrices compuestas cumplen las siguientes condiciones:

- sus valores eficaces son iguales entre sí.
- su valor eficaz (módulo del vector) es $\sqrt{3}$ veces mayor que el de las simples.
- están desfasadas entre sí $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ radianes.
- están retrasadas $\frac{\pi}{2}$ radianes respecto de las simples de igual subíndice.

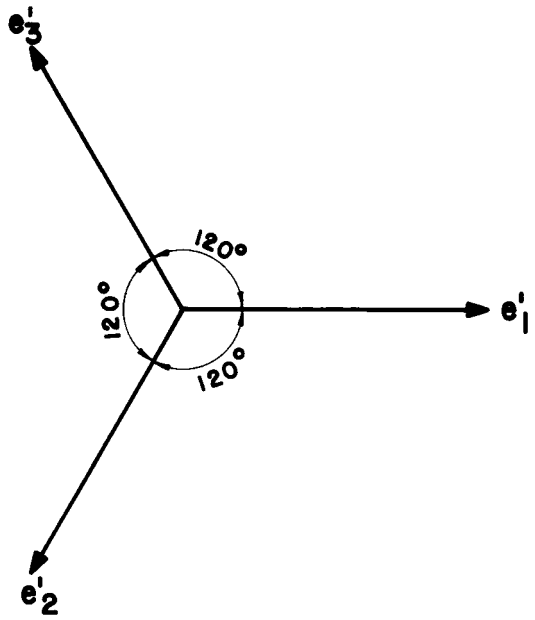
PROBLEMA Nº 3

Sean tres fuerzas electromotrices representadas por tres vectores de igual módulo y desfasados entre sí $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ radianes.

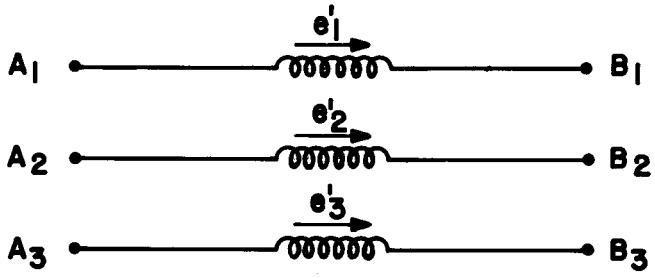
Las tres fuerzas electromotrices anteriores corresponden a tres generadores monofásicos de bornes de salida A_1-B_1, A_2-B_2 y A_3-B_3. ¿Cómo se realizaría su conexión en triángulo?. ¿Qué relación existe entre las fuerzas electromotrices simples y las compuestas?. Determinar las tensiones entre los tres hilos de la línea.

Solución

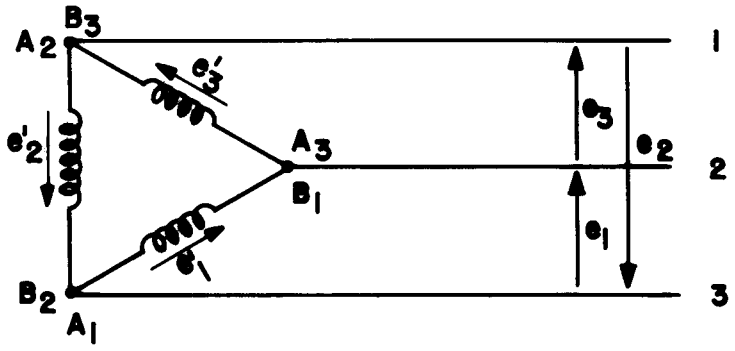
La representación de las tres fuerzas electromotrices en el diagrama rotatorio es:



Los tres generadores monofásicos vienen representados como:



Para efectuar su conexión en triángulo se deben unir A_1 con B_2 al hilo 3, A_2 con B_3 al hilo 1 y A_3 con B_1 al hilo 2, tal como se indica en la figura:



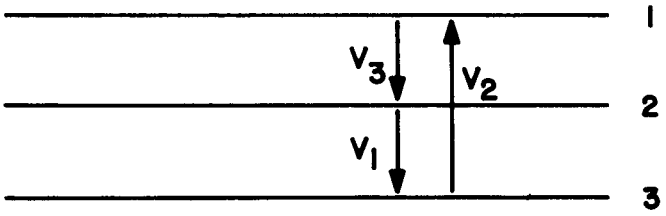
La relación existente entre las fuerzas electromotrices simples y las compuestas es:

$$e_1' = e_1$$

$$e_2' = e_2$$

$$e_3' = e_3$$

Las tensiones entre los tres hilos de la línea (tensiones compuestas o de línea) son:



cuyo valor es:

$$v_1 = -e_1$$

$$v_2 = -e_2$$

$$v_3 = -e_3$$

PROBLEMA Nº 4

Tres receptores monofásicos de idénticas características se conectan en triángulo a una línea trifásica de tensión compuesta V.

¿Qué relación existe entre las intensidades que circulan por cada uno de los receptores y las que circulan por la línea?.

Solución

Los tres receptores monofásicos conectados en triángulo se suponen conectados a una línea trifásica con orden de sucesión de fases 1, 2 y 3.

Cada receptor se representa por una impedancia Z:

$$\bar{Z} = R + j \cdot X$$

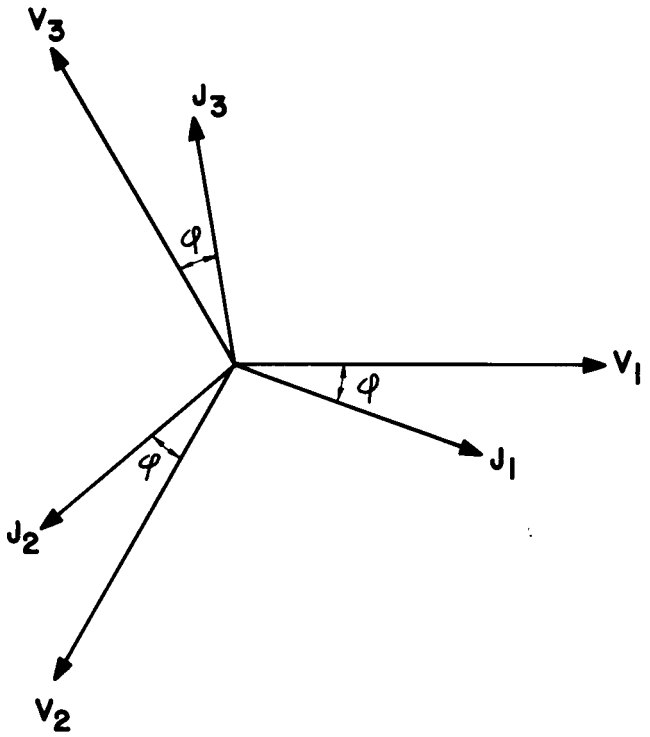
siendo las intensidades absorbidas por cada uno de ellos (intensidades simples o estrelladas) las siguientes:

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}}$$

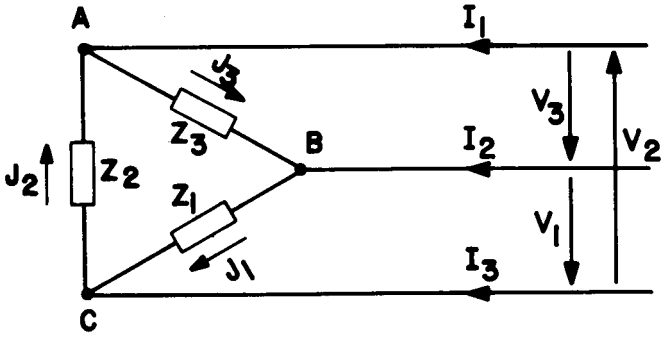
$$\bar{J}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}}$$

$$\bar{J}_3 = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}}$$

Estas intensidades están retrasadas un ángulo $\varphi = \text{arc tang}\frac{X}{R}$ respecto a las tensiones compuestas o de línea, tal como se muestra en la siguiente figura.



La línea suministra las intensidades I_1, I_2 e I_3 (intensidades compuestas o de línea):



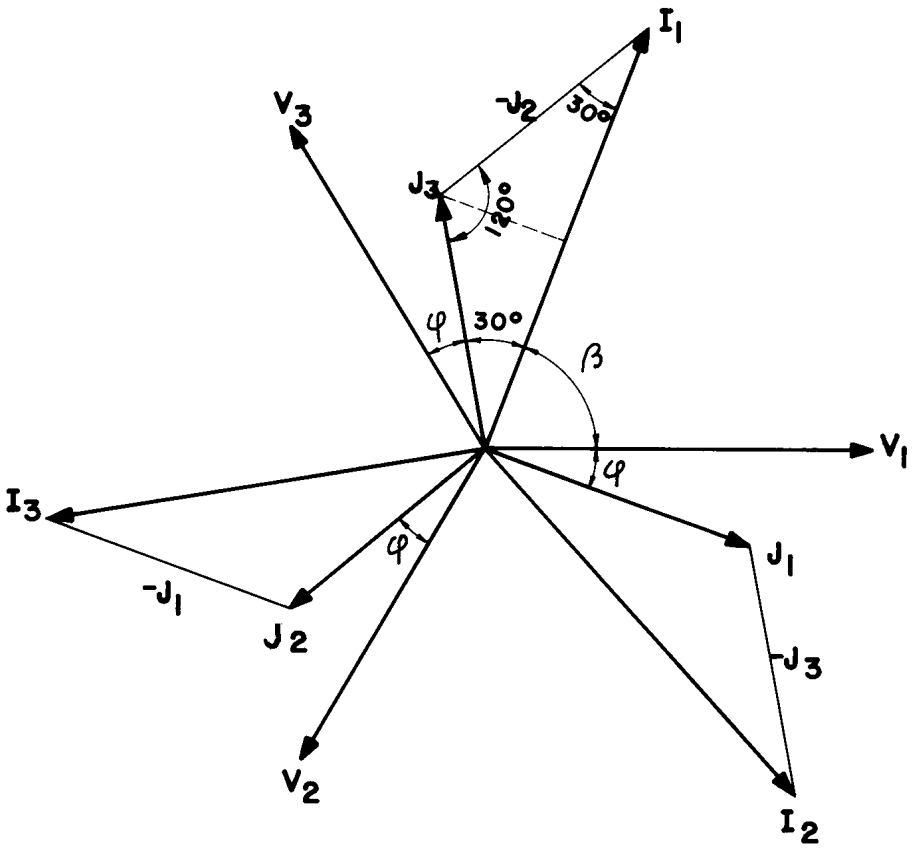
Si se aplica Kirchhoff a los nudos A, B y C se obtiene la relación que liga las intensidades compuestas con las simples:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1$$

Si en el diagrama vectorial de tensiones e intensidades se efectúan las anteriores sumas vectoriales, se obtienen los vectores correspondientes a las tres intensidades de línea.



Por ser los tres receptores monofásicos de idénticas características las intensidades simples son iguales, y por lo tanto los triángulos formados por cada dos intensidades simples con una de línea son triángulos isósceles iguales, siendo el ángulo que definen cada dos simples de $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ radianes, es decir:

$$J_1 = J_2 = J_3 = J$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

observándose en el diagrama vectorial de tensiones e intensidades que:

$$I = 2 \cdot J \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$I = \sqrt{3} \cdot J$$

es decir, el valor eficaz de las intensidades compuestas es $\sqrt{3}$ veces mayor que el de las simples.

Por otro lado, el ángulo que forma cada intensidad de línea con la tensión de línea del mismo subíndice es:

$$\beta = \frac{2 \cdot \pi}{3} - \left(\frac{\pi}{6} + \varphi \right) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

por lo que es posible situar las intensidades de línea en el diagrama vectorial sabiendo que están adelantadas $\frac{\pi}{2} - \varphi$ respecto de las tensiones compuestas del mismo subíndice.

PROBLEMA Nº 5

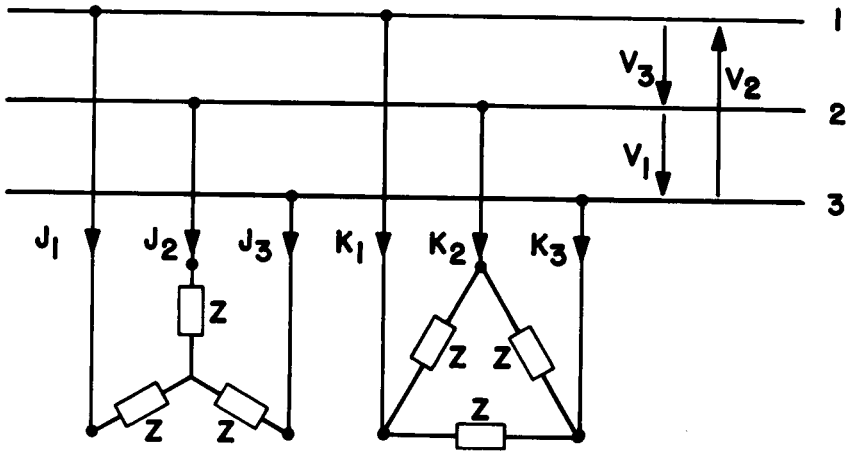
Tres receptores monofásicos de idénticas características se conectan en estrella y el conjunto a una línea trifásica de tensión compuesta V.

A la misma línea se conectan en triángulo otros tres receptores iguales a los anteriores.

Interesa conocer la relación existente entre las intensidades que toman de la línea los dos conjuntos.

Solución

Sea la línea trifásica con orden de sucesión de fases 1, 2 y 3 a la que se van a conectar los dos conjuntos de receptores.



Por ser las tres impedancias idénticas entre sí, las intensidades que toman de la línea el receptor conectado en estrella (J_1, J_2 y J_3) y el receptor conectado en triángulo (K_1, K_2 y K_3) cumplen las siguientes relaciones:

$$J_1 = J_2 = J_3 = J$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K$$

Denominando U_1, U_2 y U_3 a las tres tensiones simples o estrelladas, se verifica:

$$J = \frac{U}{Z}$$

y como:

$$V = \sqrt{3} \cdot U$$

se cumple que:

$$J = \frac{V}{\sqrt{3} \cdot Z} \qquad (1)$$

Igualmente:

$$K' = \frac{V}{Z}$$

y como:

$$K = \sqrt{3} \cdot K'$$

se cumple que:

$$K = \frac{\sqrt{3} \cdot V}{Z} \qquad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$\frac{V}{Z} = \sqrt{3} \cdot J = \frac{K}{\sqrt{3}}$$

Por consiguiente:

$$K = 3 \cdot J$$

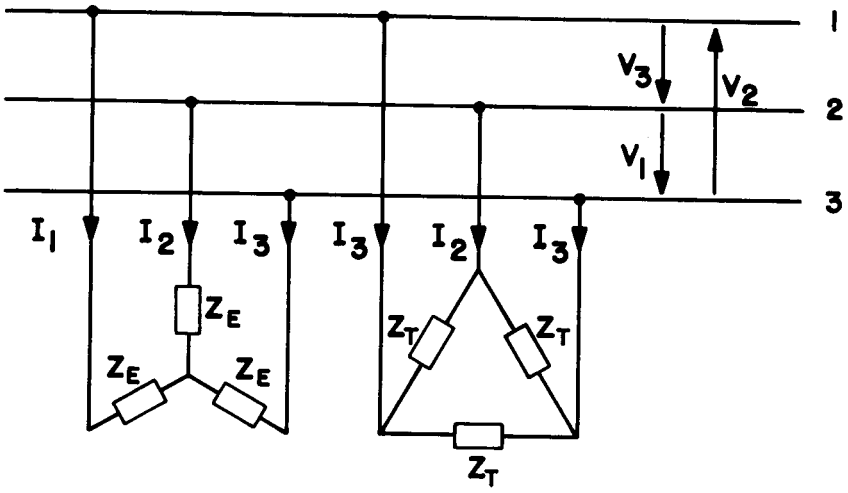
de donde se deduce que un receptor conectado en triángulo absorbe tres veces más intensidad que si se conectase en estrella a la misma línea.

PROBLEMA Nº 6

A una línea trifásica de tensión de línea V se conectan dos receptores trifásicos; el primero constituido por tres impedancias iguales entre sí conectadas en estrella y el segundo por otras tres impedancias iguales entre sí conectadas en triángulo.

Si las intensidades que toman de la línea los dos receptores tienen el mismo valor eficaz I, ¿qué relación existe entre las impedancias de ambos conjuntos?.

Solución



Según el enunciado del problema:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

Cada impedancia Z_E está sometida a la tensión simple o estrellada U, circulando por ella la intensidad I. Por otra parte, cada impedancia Z_T está conectada a la tensión compuesta o de línea V, circulando por ella la intensidad J. Por lo tanto, se verifica:

$$I = \frac{U}{Z_E} = \frac{V}{\sqrt{3} \cdot Z_E} \tag{1}$$

$$J = \frac{V}{Z_T} = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

es decir:

$$I = \frac{\sqrt{3} \cdot V}{Z_T} \tag{2}$$

Igualando las expresiones (1) y (2) resulta:

$$\frac{V}{\sqrt{3} \cdot Z_E} = \frac{\sqrt{3} \cdot V}{Z_T}$$

$$Z_T = 3 \cdot Z_E$$

Luego para que dos receptores trifásicos conectados en estrella y en triángulo a la misma línea, absorban la misma intensidad, la impedancia del receptor conectado en triángulo tiene que ser tres veces mayor que la del receptor conectado en estrella.

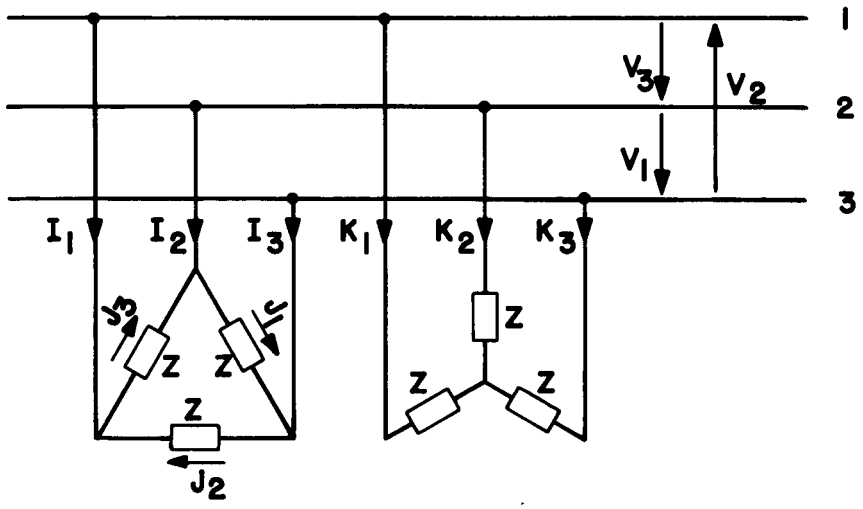
PROBLEMA Nº 7

Tres impedancias Z se conectan en triángulo y el conjunto a una línea trifásica de tensión compuesta V.

Otras tres impedancias iguales a las anteriores se conectan en estrella y el conjunto a la misma línea.

Interesa saber el ángulo que forman entre sí las intensidades que toman de un mismo hilo de la línea los dos receptores trifásicos.

Solución



En cada impedancia el ángulo que forma la tensión a la que se encuentra conectada con la intensidad que la recorre es:

$$\varphi = \text{arc tang}\frac{X}{R}$$

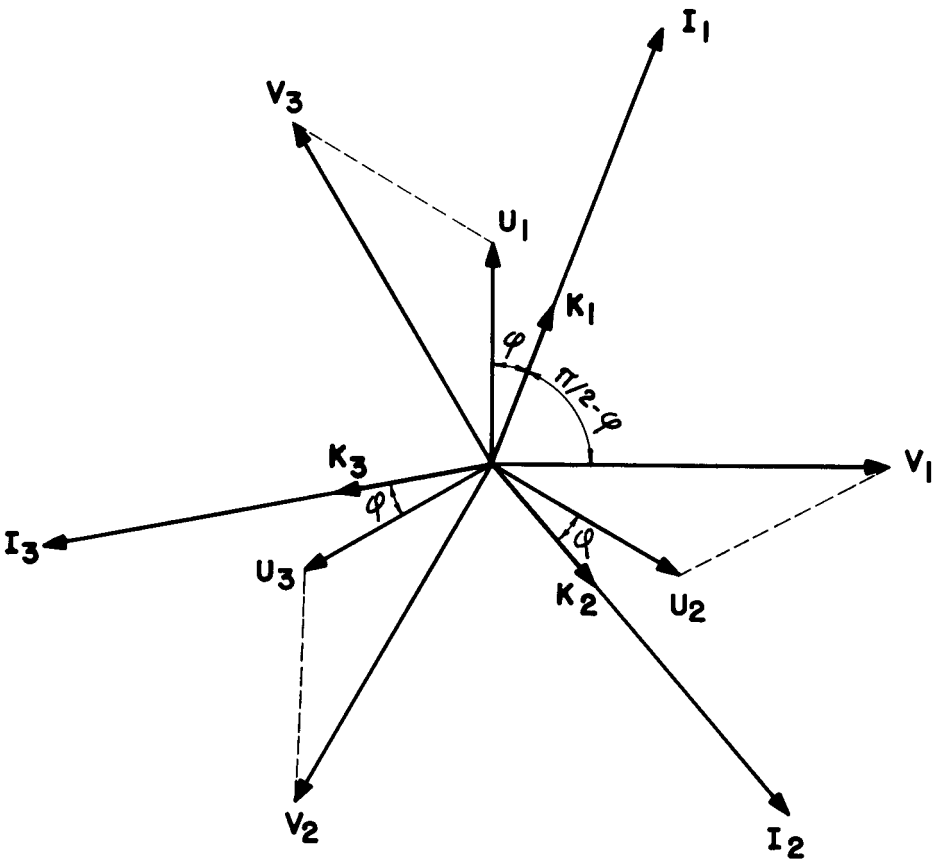
Por lo tanto, partiendo del diagrama de tensiones simples (U_1, U_2 y U_3) las intensidades K_1, K_2 y K_3 están desfasadas φ radianes respecto de las tensiones simples U_1, U_2 y U_3, respectivamente.

A partir de las tensiones simples es posible calcular las tensiones compuestas ya que:

$$\overline{V}_1 = \overline{U}_2 - \overline{U}_3$$

$$\overline{V}_2 = \overline{U}_3 - \overline{U}_1$$

$$\overline{V}_3 = \overline{U}_1 - \overline{U}_2$$



Las impedancias del receptor conectado en triángulo están sometidas a las tensiones compuestas V_1, V_2 y V_3. Según se ha deducido en el problema nº 4, las intensidades que toma de la línea un receptor equilibrado (como es el caso)

conectado en triángulo están adelantadas $\frac{\pi}{2} - \varphi$ radianes respecto de las tensiones compuestas de igual subíndice.

Como las tensiones simples y las tensiones compuestas de igual subíndice forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes, las intensidades que toman de un mismo hilo de la línea los dos receptores trifásicos (I y K) están en fase.

Los módulos de ambos vectores (valores eficaces de las intensidades), según se ha deducido en el problema nº 5, están en la relación 3/1.

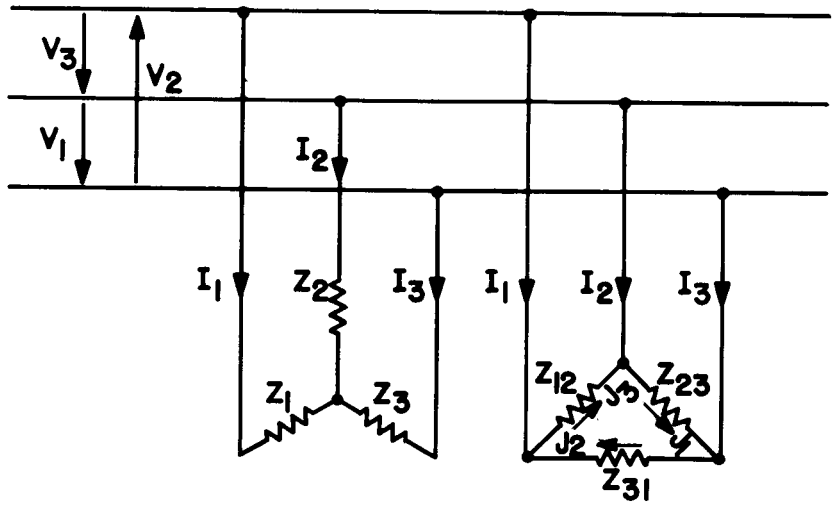
Así, es posible concluir que las intensidades que toma de la línea un receptor equilibrado se pueden referir a las tensiones simples independientemente de que dicho receptor esté conectado en estrella o en triángulo, ya que el ángulo de desfase entre ambas magnitudes es el que corresponde al factor de potencia del receptor, es decir, el ángulo φ, siendo cos φ el factor de potencia de cada receptor monofásico que constituye el trifásico.

PROBLEMA Nº 8

A una línea trifásica con tensión de línea V y orden de sucesión de fases 1,2 y 3, se conecta un sistema receptor compuesto por tres impedancias Z_1, Z_2 y Z_3 conectadas en estrella. Determinar el valor de tres impedancias Z_{12}, Z_{23} y Z_{31} tales que, conectadas en triángulo a la línea, absorban la misma intensidad que el sistema anterior.

Solución

El esquema correspondiente a esta instalación se muestra a continuación.



En el circuito en estrella se verifica:

$$\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \overline{U}_2 - \overline{U}_3 \\ \overline{V}_2 &= \overline{U}_3 - \overline{U}_1 \\ \overline{V}_3 &= \overline{U}_1 - \overline{U}_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

También se cumple:

$$\begin{aligned}\overline{U}_3 &= \overline{I}_3 \cdot \overline{Z}_3 \\ \overline{U}_2 &= \overline{I}_2 \cdot \overline{Z}_2 \\ \overline{U}_1 &= \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_1\end{aligned} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) resulta:

$$\begin{aligned}\overline{V}_2 &= \overline{I}_3 \cdot \overline{Z}_3 - \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_1 \\ \overline{V}_3 &= \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_1 - \overline{I}_2 \cdot \overline{Z}_2\end{aligned}$$

que junto con la siguiente ecuación constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$0 = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3$$

En el circuito en triángulo se verifica:

$$\begin{aligned}\overline{J}_1 &= \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_{23}} \\ \overline{J}_2 &= \frac{\overline{V}_2}{\overline{Z}_{31}} \\ \overline{J}_3 &= \frac{\overline{V}_3}{\overline{Z}_{12}}\end{aligned} \qquad (3)$$

También se cumple:

$$\begin{aligned}\overline{I}_1 &= \overline{J}_3 - \overline{J}_2 \\ \overline{I}_2 &= \overline{J}_1 - \overline{J}_3 \\ \overline{I}_3 &= \overline{J}_2 - \overline{J}_1\end{aligned} \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (4) resulta:

$$\begin{aligned}\overline{I}_1 &= \frac{\overline{V}_3}{\overline{Z}_{12}} - \frac{\overline{V}_2}{\overline{Z}_{31}} \\ \overline{I}_2 &= \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_{23}} - \frac{\overline{V}_3}{\overline{Z}_{12}} \\ \overline{I}_3 &= \frac{\overline{V}_2}{\overline{Z}_{31}} - \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_{23}}\end{aligned}$$

Del sistema de ecuaciones del circuito en estrella:

$$\bar{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{V}_2 & 0 & \bar{Z}_3 \\ \bar{V}_3 & -\bar{Z}_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\bar{Z}_1 & 0 & \bar{Z}_3 \\ \bar{Z}_1 & -\bar{Z}_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

luego:

$$\bar{I}_1 = \frac{-\bar{V}_2 \cdot \bar{Z}_2 + \bar{V}_3 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3}$$

Como la intensidad que toman los dos receptores tiene que tener el mismo valor, identificando la expresión anterior con la que determina la intensidad que toma el receptor conectado en triángulo resulta:

$$\frac{-\bar{V}_2 \cdot \bar{Z}_2 + \bar{V}_3 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3} = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_{12}} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_{31}}$$

Trabajando de igual forma para las otras dos intensidades resulta un sistema de ecuaciones cuya solución es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{Z}_{31}} &= \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3} \\ \frac{1}{\bar{Z}_{12}} &= \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3} \\ \frac{1}{\bar{Z}_{23}} &= \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3} \end{aligned} \qquad (5)$$

Y en forma de admitancias:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{31} &= \frac{\bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3} \\ \bar{\lambda}_{12} &= \frac{\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3} \\ \bar{\lambda}_{23} &= \frac{\bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3}{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3} \end{aligned} \qquad (6)$$

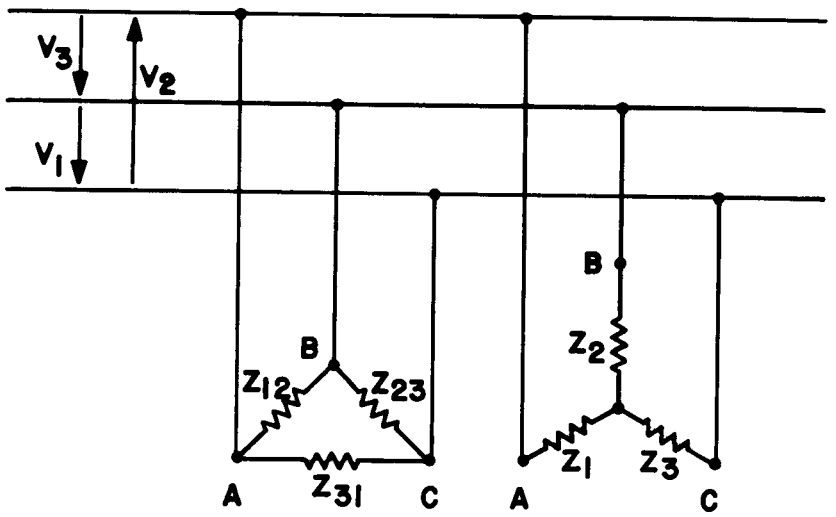
Mediante las ecuaciones (5) o (6) se pueden calcular las impedancias o admitancias que conectadas en triángulo equivalgan a las conectadas en estrella.

PROBLEMA Nº 9

A una línea trifásica con tensión de línea V y orden de sucesión de fases 1,2 y 3, está conectado un sistema de impedancias Z_{12}, Z_{23} y Z_{31} conectadas en triángulo. Determinar el circuito conectado en estrella equivalente al anterior.

Solución

El esquema correspondiente a esta instalación se muestra a continuación.



Las impedancias equivalentes entre los vértices A y B de ambos receptores son:

- en estrella: $\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$
- en triángulo: $\bar{Z}_{12}$ en paralelo con $\bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}$, es decir:

$$\frac{\bar{Z}_{12} \cdot (\bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31})}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}}$$

Como tienen que ser iguales para que los dos receptores absorban la misma intensidad de línea, se debe verificar:

$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot (\bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31})}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad (1)$$

Análogamente:

$$\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{31} \cdot (\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23})}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad (2)$$

$$\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{23} \cdot (\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{31})}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) constituyen un sistema cuya solución es:

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad (1)+(3)-(2)$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad (1)+(2)-(3)$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{23} \cdot \bar{Z}_{31}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{23} + \bar{Z}_{31}} \quad (2)+(3)-(1)$$

expresiones que permiten pasar de una conexión en triángulo a una en estrella equivalente.

Si se trata de un triángulo simétrico, es decir, las tres impedancias son iguales:

$$Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = Z_T$$

se puede reemplazar por una estrella simétrica en la que cada impedancia valga:

$$Z_E = Z_1 = Z_2 = Z_3 = \frac{Z_T}{3}$$

tal como se dedujo en el problema nº 6.