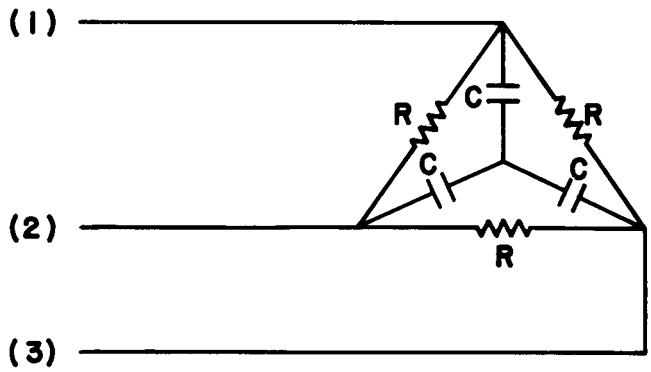
PROBLEMA Nº 10

Una línea trifásica equilibrada con tensión de línea de 100 V alimenta el receptor de la figura, en el cual las tres resistencias están conectadas en triángulo y los tres condensadores en estrella.

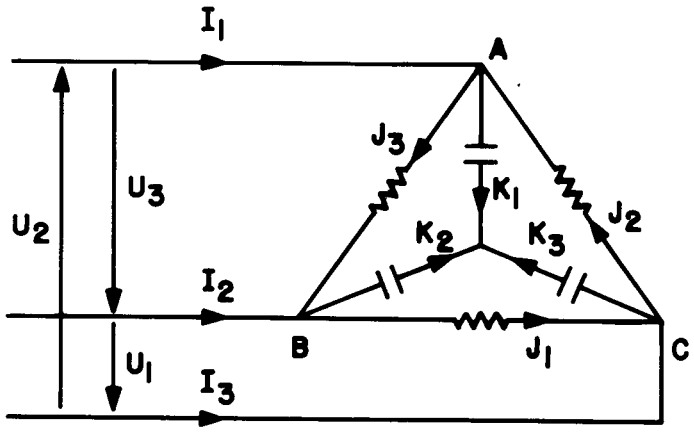
A 50 Hz de frecuencia la impedancia de cada condensador es de 1000 Ω y la impedancia de cada resistencia es también de 1000 Ω.

Suponiendo que los elementos que figuran en el esquema sean puros, se pide calcular la intensidad que circula por cada hilo de la línea, así como el factor de potencia de la instalación.



Solución

Las intensidades que circulan por cada resistencia, por cada condensador y por los hilos de la línea tendrán el sentido que se indica en el siguiente esquema:



Por ser la línea equilibrada y las tres resistencias iguales se verifica:

$$J_1 = J_2 = J_3 = J \tag{1}$$

Igualmente se cumple para las tres intensidades que circulan por los condensadores que:

$$K_1 = K_2 = K_3 = K \tag{2}$$

Aplicando el primer teorema de Kirchhoff a los nudos A, B y C resulta que:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 + \bar{K}_1 - \bar{J}_2 \tag{3}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 + \bar{K}_2 - \bar{J}_3 \tag{4}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_2 + \bar{K}_3 - \bar{J}_1 \tag{5}$$

de donde se deduce que:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

Por lo tanto, se calculará por ejemplo I_1, ya que el valor eficaz de las intensidades que circulan por los tres hilos es el mismo.

El valor eficaz de las intensidades que circulan por las tres resistencias y por los tres condensadores es:

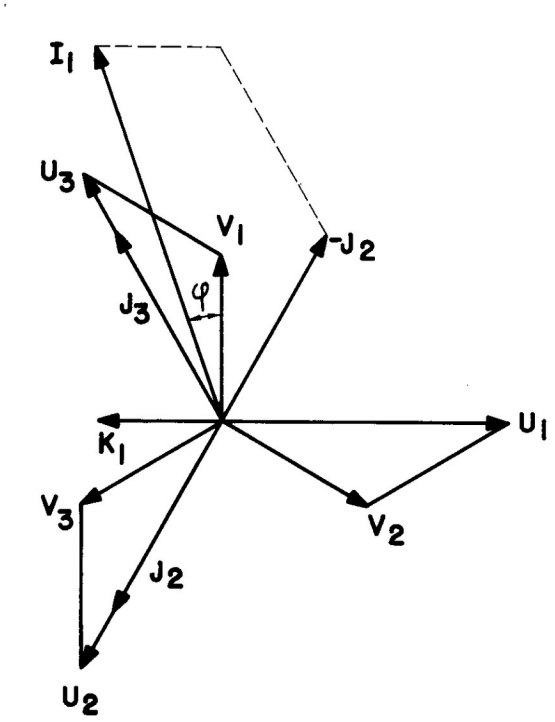
$$J = \frac{U}{R} = \frac{100}{1000} = 0.1\,A$$

$$K = \frac{V}{X_c} = \frac{\frac{100}{\sqrt{3}}}{1000} = 0.057\ A$$

El ejercicio se resolverá por cuatro métodos:

Método gráfico

Si se construye a escala el diagrama vectorial de tensiones simples y compuestas y sobre él se sitúan las seis intensidades J_1, J_2, J_3, K_1, K_2 y K_3, se pueden obtener gráficamente las tres intensidades de línea de acuerdo a las ecuaciones (3), (4) y (5) tal como se muestra a continuación.



Escala de intensidades: 0.1 A = 3 cm

Sobre el gráfico se observa que el vector I_1 mide 5.5 cm, por consiguiente el valor de dicha intensidad es:

$$I_1 = \frac{0.1}{3} \cdot 5.5 = 0.183 \text{ A}$$

$$I_1 = 0.183 \text{ A}$$

En cuanto al factor de potencia de la instalación, también se deduce, tomando medidas sobre el gráfico:

$$\text{tang}\varphi = \frac{1.7}{5.2} = 0.326$$

que corresponde a un factor de potencia de:

$$\cos\varphi = 0.95$$

Método geométrico

Para resolver el problema por el método geométrico se proyecta $-J_2$, K_1 y J_3 sobre la dirección de V_1 y sobre la perpendicular a V_1. Elevando al cuadrado las proyecciones, sumando y extrayendo la raíz cuadrada se obtiene el valor eficaz de I_1, es decir:

$$I_1 = \sqrt{\left(K_1 + J_3 \cdot \cos 60^o - J_2 \cdot \cos 60^o\right)^2 + \left(J_3 \cdot \text{sen}\, 60^o + J_2 \cdot \text{sen}\, 60^o\right)^2}$$

Teniendo en cuenta las igualdades (1) y (2) resulta que:

$$I_1 = \sqrt{K^2 + 4 \cdot J^2 \cdot \text{sen}^2\, 60^o}$$

y sustituyendo valores:

$$I_1 = \sqrt{0.057^2 + 4 \cdot 0.1^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$I_1 = 0.182 \text{ A}$$

valor coincidente con el obtenido por el método gráfico.

En cuanto al factor de potencia de la instalación, geométricamente:

$$\text{tang}\varphi = \frac{K}{2 \cdot J \cdot \text{sen}\, 60^o} = \frac{0.057}{2 \cdot 0.1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

que corresponde a un factor de potencia de:

$$\cos\varphi = 0.948$$

Puede observarse también que la diferencia es mínima con el valor obtenido gráficamente.

Método complejo

Para resolver el problema por el método complejo hay que expresar en forma compleja las intensidades que circulan por las tres resistencias y los tres condensadores y luego realizar la suma de dichas intensidades de acuerdo a las ecuaciones (3), (4) y (5). Así:

$$\bar{J}_3 = 0.1 \left| \underline{120^o} \right.$$

$$\bar{K}_1 = 0.057 \left| \underline{180^o} \right.$$

$$-\bar{J}_2 = 0.1 \left| \underline{60^o} \right.$$

Y por la ecuación (3):

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 + \bar{K}_1 - \bar{J}_2$$

$$\bar{I}_1 = 0.1 \left| \underline{120^o} + 0.057 \right| \underline{180^o} + 0.1 \left| \underline{60^o} = 0.182 \right| \underline{108.42^o} = -0.057 + j\,0.172$$

$$I_1 = 0.182\ A$$

El factor de potencia de la instalación vale:

$$\cos\varphi = \cos(108.42^o - 90^o) = \cos 18.42^o = 0.948$$

$$\cos\varphi = 0.948$$

O también:

$$\text{tang}\varphi = \frac{0.057}{0.172} = 0.33$$

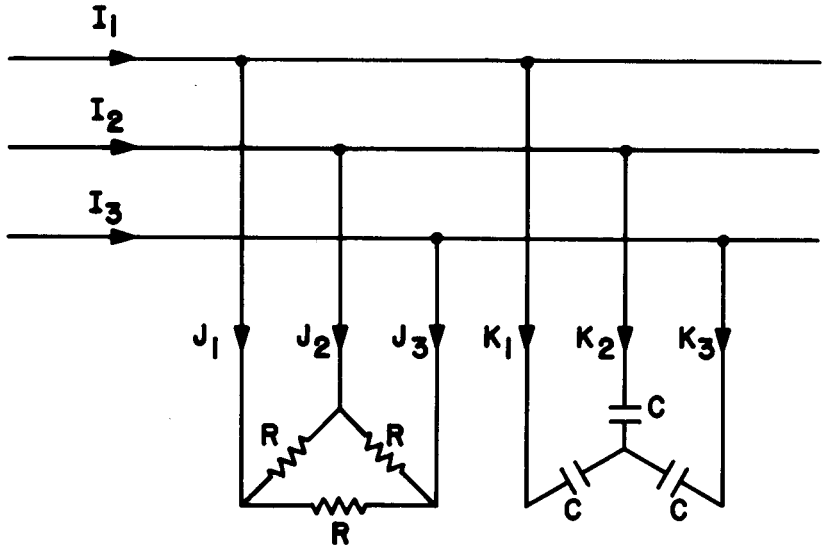
luego:

$$\cos\varphi = 0.948$$

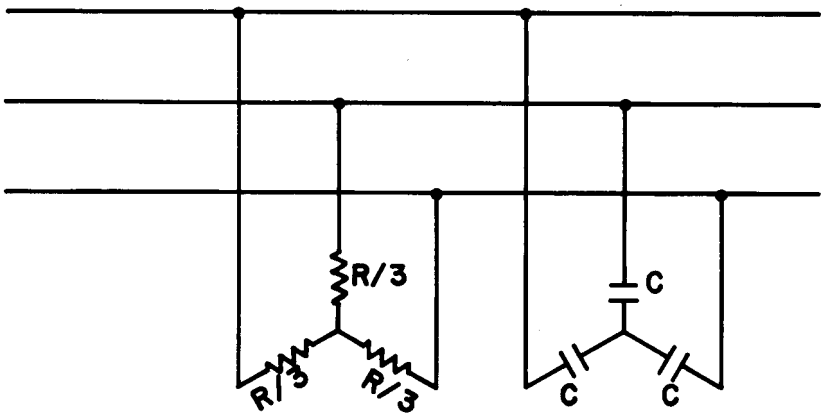
Método de resolución por circuitos equivalentes

Este método consiste en buscar un circuito más sencillo que equivalga eléctricamente al del enunciado.

Para empezar se separan los dos circuitos:



A continuación el receptor en triángulo se sustituye por uno en estrella equivalente, es decir, cuyos monofásicos sean de R/3 Ω, con lo que el circuito equivalente queda de la forma:



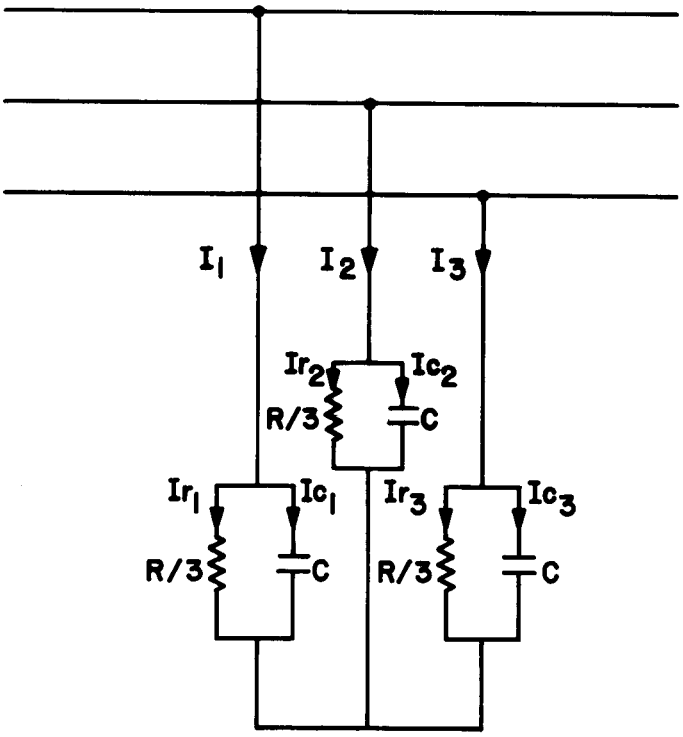
Por estar los puntos neutros de los receptores capacitivos y de las resistencias al mismo potencial se puede reemplazar el circuito anterior por uno compuesto por tres circuitos de la misma impedancia conectados en estrella, formado cada uno por una resistencia y un condensador conectados en paralelo, verificándose:

$$I_{r1} = I_{r2} = I_{r3} = I_r$$

$$I_{c1} = I_{c2} = I_{c3} = I_c$$

y, por lo tanto:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$



$$\bar{I} = \bar{I_r} + \bar{I_c}$$

$$I_r = \frac{V}{\frac{R}{3}} = \frac{\frac{U}{\sqrt{3}}}{\frac{R}{3}} = \frac{3 \cdot U}{\sqrt{3} \cdot R} = \frac{3 \cdot 100}{\sqrt{3} \cdot 1000} = 0.173 \text{ A}$$

$$I_c = \frac{V}{X_c} = \frac{\frac{U}{\sqrt{3}}}{X_c} = \frac{U}{\sqrt{3} \cdot X_c} = \frac{100}{\sqrt{3} \cdot 1000} = 0.057 \text{ A}$$

El valor de la intensidad que circula por cada hilo de la línea es:

$$I = \sqrt{I_r^2 + I_c^2} = \sqrt{0.173^2 + 0.057^2}$$

$$I = 0.182 \text{ A}$$

El factor de potencia del receptor equivalente vale:

$$\text{tang}\varphi = \frac{I_c}{I_r} = \frac{0.057}{0.173} = 0.33$$

$$\cos\varphi = 0.948$$

valores idénticos a los obtenidos por los procedimientos anteriores.

PROBLEMA Nº 11

Una línea trifásica cuya sucesión de fases es 1, 2 y 3 alimenta a 220 V y 50 Hz un receptor formado por tres bobinas idénticas conectadas en triángulo. La potencia total que absorbe dicho receptor es de 30000 W y la intensidad que toma por cada hilo de la línea tiene un valor eficaz de 100 A.

Se pide:

a) factor de potencia de cada bobina, su resistencia y su coeficiente de autoinducción.
b) intensidad en cada hilo de la línea si las tres bobinas se conectan en estrella.
c) Intensidad en cada hilo de la línea estando las bobinas conectadas en triángulo y una de ellas fuera de servicio por rotura.

Solución

a) Por tratarse de un receptor equilibrado:

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \cos\varphi_3 = \cos\varphi$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L$$

La potencia que absorbe un receptor trifásico equilibrado vale:

$$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi$$

donde P es la potencia activa que toma el receptor de la línea, V la tensión compuesta, I la intensidad compuesta y cosφ el factor de potencia de cada bobina.

Por lo tanto:

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V \cdot I} = \frac{30000}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 100} = 0.787$$

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \cos\varphi_3 = \cos\varphi = 0.787$$

En cuanto a la resistencia y el coeficiente de autoinducción de cada bobina, cada autoinducción está conectada a la tensión de línea V y absorbe una intensidad J, por lo tanto para, por ejemplo, la bobina 1 se verifica:

$$\overline{V}_1 = 220 \angle 0^o$$

$$\bar{J}_1 = \frac{100}{\sqrt{3}} \Big| \underline{- \arccos 0.787} = \frac{100}{\sqrt{3}} \Big| \underline{- 38.09^\circ}$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{J}_1} = \frac{220 \Big| \underline{0^\circ}}{\frac{100}{\sqrt{3}} \Big| \underline{- 38.09^\circ}} = 3.81 \Big| \underline{38.09^\circ} = 3 + j\,2.35$$

luego:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R = 3\,\Omega$$

$$X_1 = X_2 = X_3 = X = 2.35\,\Omega$$

Como:

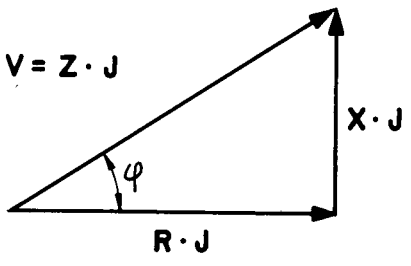
$$X = L \cdot \omega$$

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{2.35}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 7.48 \cdot 10^{-3}\ H$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L = 7.48 \cdot 10^{-3}\ H$$

Otra manera de determinar la resistencia y el coeficiente de autoinducción de cada bobina es la siguiente.

Cada autoinducción está conectada a la tensión de línea V y absorbe una intensidad J, por lo tanto se verifica:



De la figura anterior se deduce que:

$$R = \frac{V \cdot \cos\varphi}{J} = \frac{220 \cdot 0.787}{\frac{100}{\sqrt{3}}} = 3\,\Omega$$

$$X = \frac{V \cdot \operatorname{sen}\varphi}{J} = \frac{220 \cdot 0.617}{\frac{100}{\sqrt{3}}} = 2.35\,\Omega$$

Como:

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{2.35}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 7.48 \cdot 10^{-3}\ H$$

$$R = 3\ \Omega$$

$$L = 7.48 \cdot 10^{-3}\ H$$

b) Por tratarse de un receptor equilibrado:

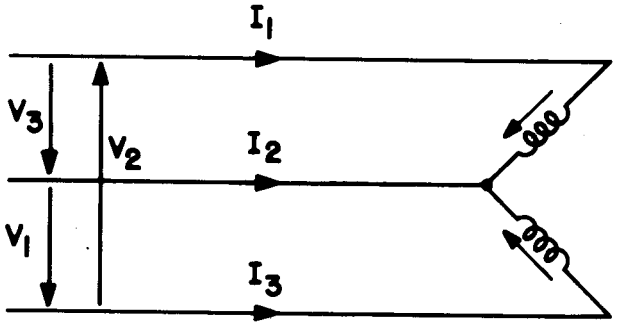
$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

La intensidad que toma de la línea un receptor conectado en estrella es la tercera parte de la que toma cuando está conectado en triángulo, por consiguiente:

$$I = \frac{100}{3} = 33.33\ A$$

$$I = 33.33\ A$$

c) Al quedar una bobina fuera de servicio la instalación queda como se indica en la siguiente figura:



En un receptor trifásico conectado en triángulo se verifica:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1$$

Si una de las bobinas del receptor, por ejemplo la 2, queda fuera de servicio por rotura se cumplirá que $J_2 = 0$, por lo tanto, el sistema de ecuaciones anterior podrá expresarse como sigue:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3$$

$$\bar{I}_3 = -\bar{J}_1$$

de donde se deduce que:

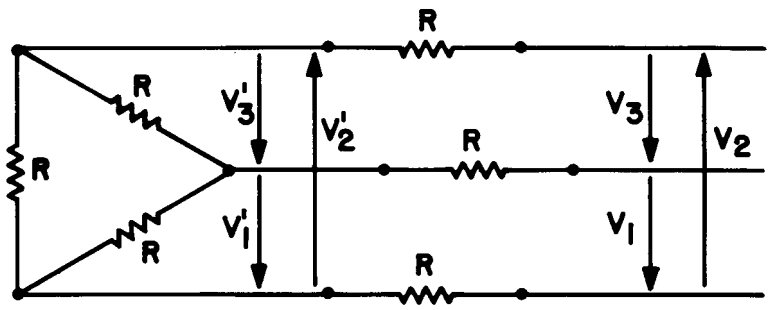
$$I_1 = I_3 = J = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57.73 \text{ A}$$

$$I_2 = 100 \text{ A}$$

PROBLEMA Nº 12

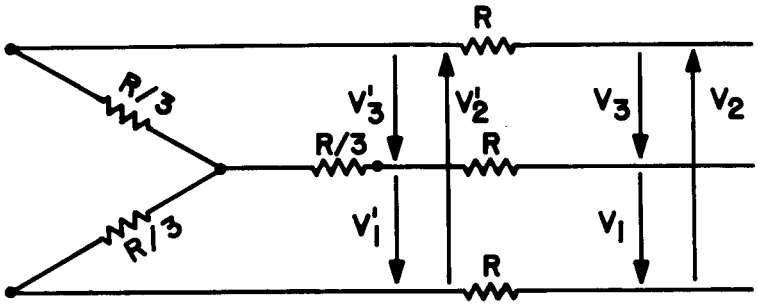
Seis resistencias no inductivas de 10 Ω están dispuestas según se indica en la figura. Sabiendo que el valor eficaz de la tensión entre fases es de 220 V, se pide:

a) valor de la intensidad I que circula por la línea y de la intensidad J que circula por cada resistencia del receptor conectado en triángulo.
b) caída de tensión en las resistencias en serie con las fases y diferencia de potencial en bornes del receptor conectado en triángulo.
c) potencia total absorbida por la instalación.

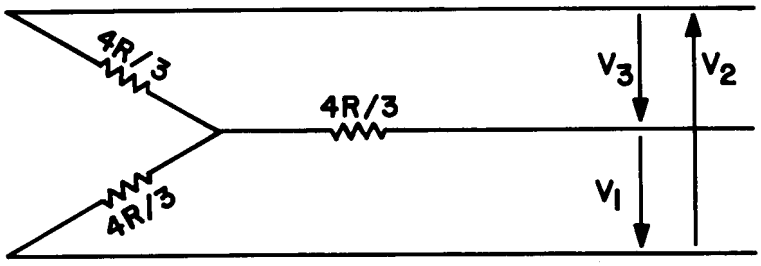


Solución

a) Según se ha visto en el problema nº 9, todo receptor conectado en triángulo se puede transformar en otro equivalente conectado en estrella, es decir, tal que la intensidad que tome de la línea sea la misma. Por consiguiente, se puede sustituir el triángulo de la figura por otro equivalente en estrella que, por ser el triángulo equilibrado, debe tener un valor de R/3 en cada una de las ramas, es decir:



Al tener ahora en cada rama dos resistencias en serie este circuito se puede sustituir por el siguiente:



Las tensiones compuestas en el sistema directo se expresan en forma compleja como:

$$\overline{V}_1 = \overline{V}$$

$$\overline{V}_2 = \overline{V} \cdot \overline{A}^2$$

$$\overline{V}_3 = \overline{V} \cdot \overline{A}$$

siendo A un operador de la forma:

$$\overline{A} = 1\angle 120^\circ = 1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos 120^\circ + j \operatorname{sen} 120^\circ$$

es decir, un número complejo de módulo 1 y argumento 120º.

Tomando V como origen de fases:

$$\overline{V}_1 = 220 \angle 0^o$$

$$\overline{V}_2 = 220 \angle 240^o$$

$$\overline{V}_3 = 220 \angle 120^o$$

En cuanto a las tensiones simples se sabe que están adelantadas 90º respecto a las compuestas de igual subíndice, por tanto sus expresiones complejas serán:

$$\overline{U}_1 = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 90^o = 127 \angle 90^o$$

$$\overline{U}_2 = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 330^o = 127 \angle 330^o$$

$$\overline{U}_3 = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 210^o = 127 \angle 210^o$$

Estas son las tensiones a las que quedan conectadas las resistencias equivalentes de valor 4R/3. Por lo tanto, las intensidades de línea serán:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_1}{\frac{4 \cdot R}{3}} = \frac{127 \angle 90^o}{\frac{4 \cdot 10}{3}} = 9.53 \angle 90^o$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_2}{\frac{4 \cdot R}{3}} = \frac{127 \angle 330^o}{\frac{4 \cdot 10}{3}} = 9.53 \angle 330^o$$

$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_3}{\frac{4 \cdot R}{3}} = \frac{127 \angle 210^o}{\frac{4 \cdot 10}{3}} = 9.53 \angle 210^o$$

$$\overline{I}_1 = 9.53 \angle 90^o \qquad \overline{I}_2 = 9.53 \angle 330^o \qquad \overline{I}_3 = 9.53 \angle 210^o$$

Las tensiones en bornes de la estrella equivalente del triángulo valen:

$$\overline{U}_1' = \overline{I}_1 \cdot \frac{R}{3} = 9.53 \angle 90^o \cdot \frac{10}{3} = 31.76 \angle 90^o$$

$$\overline{U}_2' = \overline{I}_2 \cdot \frac{R}{3} = 9.53 \angle 330^o \cdot \frac{10}{3} = 31.76 \angle 330^o$$

$$\overline{U}_3' = \overline{I}_3 \cdot \frac{R}{3} = 9.53 \angle 210^o \cdot \frac{10}{3} = 31.76 \angle 210^o$$

Por lo tanto, las tensiones en bornes del receptor en triángulo valen:

$$\overline{V}_1' = \overline{U}_2' - \overline{U}_3' = 31.76\left|\underline{330^o} - 31.76\right|\underline{210^o} = 27.51 - j15.88 - (-27.51 - j15.88) = 55 = 55\left|\underline{0^o}\right.$$

$$\overline{V}_2' = \overline{U}_3' - \overline{U}_1' = 31.76\left|\underline{210^o} - 31.76\right|\underline{90^o} = -27.51 - j15.88 - j31.76 = -27.51 - j47.64 = 55\left|\underline{240^o}\right.$$

$$\overline{V}_3' = \overline{U}_1' - \overline{U}_2' = 31.76\left|\underline{90^o} - 31.76\right|\underline{330^o} = j31.76 - (27.51 - j15.88) = -27.51 + j47.64 = 55\left|\underline{120^o}\right.$$

Y el valor de las intensidades que circulan por cada resistencia del receptor conectado en triángulo:

$$\overline{J}_1 = \frac{\overline{V}_1'}{R} = \frac{55\left|\underline{0^o}\right.}{10} = 5.5\left|\underline{0^o}\right.$$

$$\overline{J}_2 = \frac{\overline{V}_2'}{R} = \frac{55\left|\underline{240^o}\right.}{10} = 5.5\left|\underline{240^o}\right.$$

$$\overline{J}_3 = \frac{\overline{V}_3'}{R} = \frac{55\left|\underline{120^o}\right.}{10} = 5.5\left|\underline{120^o}\right.$$

$$\overline{J}_1 = 5.5\left|\underline{0^o}\right. \qquad \overline{J}_2 = 5.5\left|\underline{240^o}\right. \qquad \overline{J}_3 = 5.5\left|\underline{120^o}\right.$$

b) Las caídas de tensión en las resistencias en serie con las fases valen:

$$\overline{V}_{R1} = \overline{I}_1 \cdot R = 9.53\left|\underline{90^o} \cdot 10 = 95.3\right|\underline{90^o}$$

$$\overline{V}_{R2} = \overline{I}_2 \cdot R = 9.53\left|\underline{330^o} \cdot 10 = 95.3\right|\underline{330^o}$$

$$\overline{V}_{R3} = \overline{I}_3 \cdot R = 9.53\left|\underline{210^o} \cdot 10 = 95.3\right|\underline{210^o}$$

$$\overline{V}_{R1} = 95.3\left|\underline{90^o}\right. \qquad \overline{V}_{R2} = 95.3\left|\underline{330^o}\right. \qquad \overline{V}_{R3} = 95.3\left|\underline{210^o}\right.$$

Respecto a las diferencias de potencial en bornes del receptor conectado en triángulo ya han sido calculadas en el apartado anterior:

$$\overline{V}_1' = 55\left|\underline{0^o}\right. \qquad \overline{V}_2' = 55\left|\underline{240^o}\right. \qquad \overline{V}_3' = 55\left|\underline{120^o}\right.$$

c) La potencia total absorbida por la instalación es la misma que absorbe el receptor equivalente, es decir:

$$P = 3 \cdot I^2 \cdot \frac{4 \cdot R}{3} = 4 \cdot R \cdot I^2 = 4 \cdot 10 \cdot 9.53^2 = 3632.83\,W$$

$$P = 3632.83\,W$$

O también:

$$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 9.53 \cdot 1 = 3631.41\,W$$

$$P = 3631.41\,W$$

Resolución por el método vectorial

Para resolver el problema por el método vectorial se opera como se describe a continuación.

Sobre tres ejes que forman 120º entre sí se llevan las intensidades J, y sobre un sistema adelantado 90º respecto al anterior se llevan las intensidades I, sabiendo que sus módulos están relacionados por $\sqrt{3}$.

Aplicando una semejanza de razón R se llevan sobre las I los vectores I·R, que corresponden a las caídas de tensión en las resistencias en serie con las fases, y a continuación se lleva sobre el diagrama la siguiente igualdad:

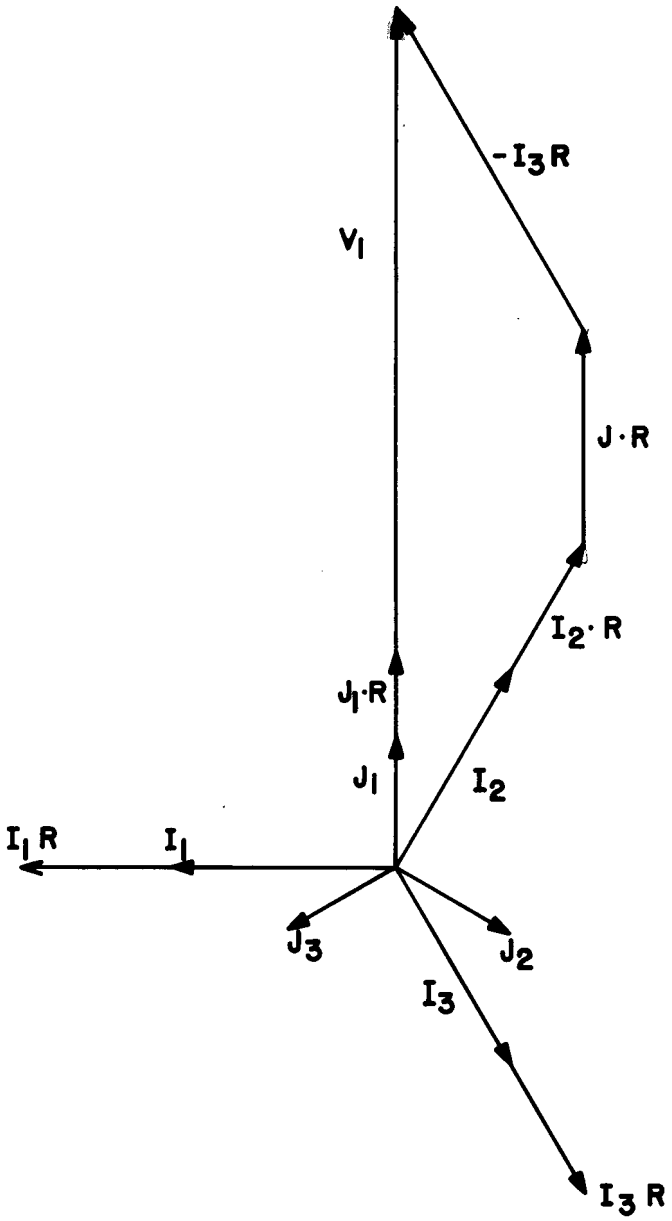
$$\overline{V}_1 = \overline{I}_2 \cdot R + \overline{J}_1 \cdot R - \overline{I}_3 \cdot R$$

Como V_1 vale 220 V, la escala de las tensiones resulta ser de:

$$V_1 = 115\ mm = 220\ V$$

luego:

$$1mm = 1.913\ V$$



$$\overline{V_1} = \overline{I_2} \cdot R + \overline{J_1} \cdot R - \overline{I_3} \cdot R$$

Así, sobre el diagrama anterior se leen las siguientes magnitudes:

- tensión en bornes del receptor conectado en triángulo:

$$V' = J \cdot R = 28.86\,\text{mm} \cdot 1.913\,\frac{\text{V}}{\text{mm}} = 55.22\,\text{V}$$

- intensidad que circula por cada resistencia del receptor conectado en triángulo:

$$J = \frac{V'}{R} = \frac{55.22}{10} = 5.52\ A$$

- intensidad que circula por cada hilo de la línea:

$$I = \sqrt{3} \cdot J = \sqrt{3} \cdot 5.52 = 9.56\ A$$

- caída de tensión en las resistencias en serie con las fases:

$$V_R = I \cdot R = 9.56 \cdot 10 = 95.6\ V$$

o gráficamente:

$$V_R = I \cdot R = 50\ mm \cdot 1.913 \frac{V}{mm} = 95.65\ V$$

Como puede observarse los resultados son muy similares a los obtenidos analíticamente.

PROBLEMA Nº 13

Demostrar que en toda línea trifásica a tres hilos la potencia activa que absorben los receptores conectados a ella se puede determinar mediante las lecturas de dos vatímetros monofásicos.

Explicar cómo se debe realizar la conexión.

Solución

Todo conjunto de receptores, equilibrados o desequilibrados, conectados a una línea trifásica a tres hilos se puede sustituir por tres impedancias conectadas en estrella.

Sea la estrella equivalente de un conjunto de receptores conectados a una línea trifásica a tres hilos. La potencia instantánea que suministra la línea es:

$$p = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_3 \qquad (1)$$

siendo u_1, u_2 y u_3 los valores instantáneos de las tensiones simples en bornes de las impedancias equivalentes conectadas en estrella.

Como el circuito es a tres hilos se verifica:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

expresión en la que se puede despejar una cualquiera de las intensidades, por ejemplo i_3:

$$i_3 = - i_1 - i_2$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (1) resulta:

$$p = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 - u_3 \cdot (i_1 + i_2)$$

y operando:

$$p = (u_1 - u_3) \cdot i_1 + (u_2 - u_3) \cdot i_2 \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta las relaciones que ligan las tensiones simples con las compuestas:

$$v_1 = u_2 - u_3$$

$$v_2 = u_3 - u_1$$

la expresión (2) queda:

$$p = v_1 \cdot i_2 - v_2 \cdot i_1$$

Si en lugar de sustituir i_3 se hubieran sustituido i_1 o i_2, se obtendrían otras dos expresiones de la forma:

$$p = v_2 \cdot i_3 - v_3 \cdot i_2$$

$$p = v_3 \cdot i_1 - v_1 \cdot i_3$$

Pasando las tres expresiones anteriores de la potencia instantánea a valores medios resulta:

$$P = V_1 \cdot I_2 \cdot \cos(V_1, I_2) + V_2 \cdot I_1 \cdot \cos(-V_2, I_1)$$

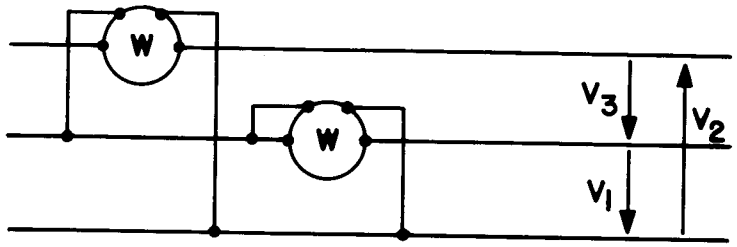
$$P = V_2 \cdot I_3 \cdot \cos(V_2, I_3) + V_3 \cdot I_2 \cdot \cos(-V_3, I_2)$$

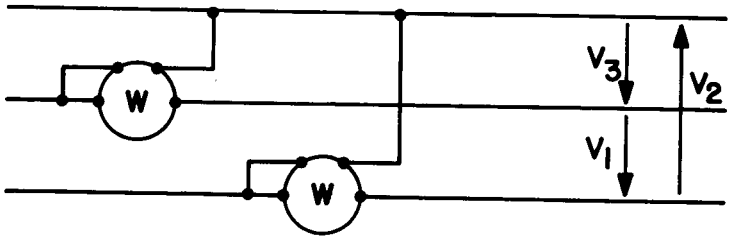
$$P = V_3 \cdot I_1 \cdot \cos(V_3, I_1) + V_1 \cdot I_3 \cdot \cos(-V_1, I_3)$$

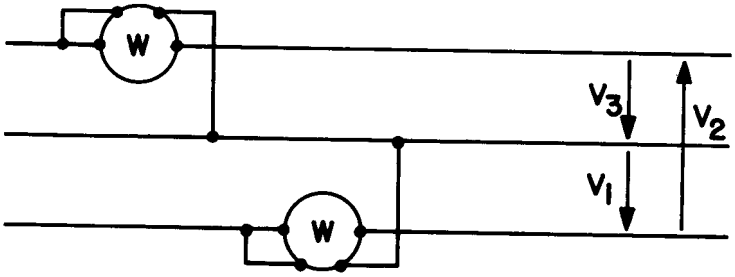
Cada uno de los seis sumandos que aparecen en las expresiones anteriores se puede determinar mediante la lectura de un vatímetro monofásico conectado a la intensidad y tensión que figura en cada sumando.

Como cada expresión tiene dos sumandos, se puede determinar la potencia total que absorbe el conjunto de receptores trifásicos conectados a la línea mediante el empleo de dos vatímetros monofásicos, cuyas bobinas amperimétricas irían conectadas a dos cualesquiera de las fases y las voltimétricas entre dichas fases y la tercera que queda libre. La forma de conexión descrita constituye el método de los dos vatímetros.

Los esquemas de conexión correspondientes se muestran a continuación.


W
W
V3
V2
V1


W
W
V3
V2
V1


W
W
V3
V2
V1

PROBLEMA Nº 14

Un alternador trifásico en estrella de tensión simple 70 V alimenta un taller compuesto por:

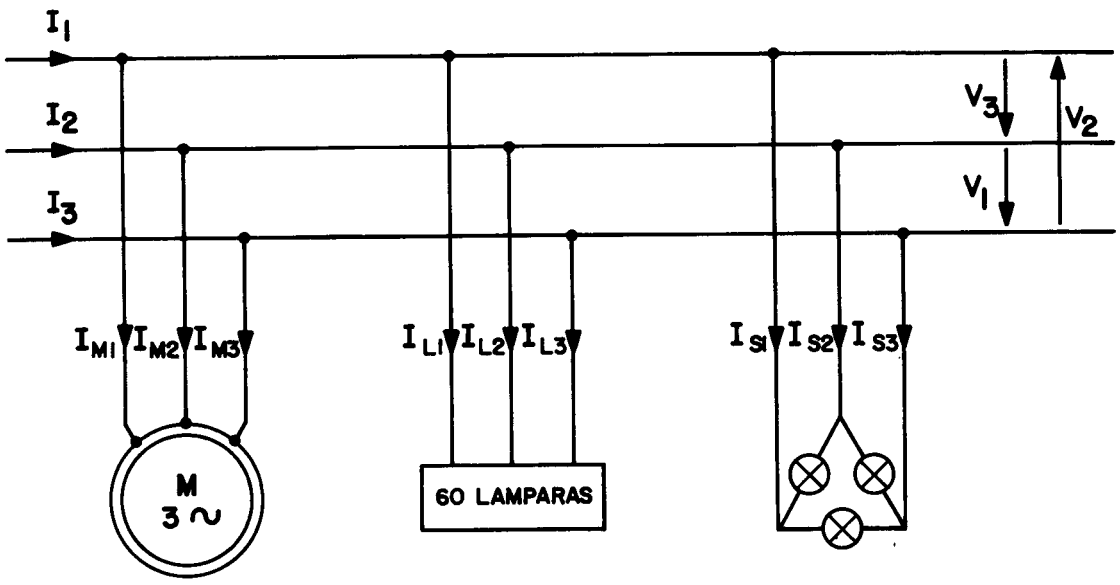
- 1 motor trifásico asíncrono de 20 CV, cosφ = 0.85 y rendimiento 90 %.
- 60 lámparas de 10 bujías cada una, repartidas por igual entre fases y siendo el consumo de cada bujía de 3.5 W.
- 9 lámparas de arco conectadas en grupos de tres, circulando por cada grupo 10 A si la conexión es en triángulo.

Se pide calcular:

a) potencia que suministra el alternador.
b) intensidad que suministra el alternador y su desfase.
c) potencia activa y reactiva que toman del alternador el conjunto de receptores, suponiendo que dichas potencias se determinan mediante dos vatímetros y dos vármetros conectados según el método de los dos vatímetros.

Solución

a) El esquema correspondiente a esta instalación es:



La forma de conexión de las 60 lámparas no se conoce, aunque sí se sabe que están repartidas por igual entre las fases. En cuanto a las 9 lámparas de arco, en la figura cada lámpara dibujada representa la asociación en paralelo de tres lámparas.

La potencia que suministra el alternador es igual a la suma de las potencias absorbidas por los receptores, es decir:

$$P = P_M + P_L + P_S \tag{1}$$

Las potencias absorbidas por cada receptor valen:

$$P_M = \frac{20 \cdot 736}{0.9} = 16355.56\ W$$

$$P_L = 60 \cdot 10 \cdot 3.5 = 2100\ W$$

$$P_S = \sqrt{3} \cdot V \cdot I_S \cdot \cos\varphi_S = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot U \cdot \sqrt{3} \cdot J_S \cdot \cos\varphi_S = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 70 \cdot 10 \cdot 1 = 3637.31\ W$$

Por lo tanto, por la ecuación (1), la potencia suministrada por el alternador vale:

$$P = 16355.56 + 2100 + 3637.31 = 22092.87\ W$$

$$P = 22092.87\ W$$

b) La intensidad que suministra el alternador es igual a la suma de las intensidades que toman los receptores. Al ser los tres receptores equilibrados se verifica:

$$I_1 = I_2 = I_3$$

$$I_{M1} = I_{M2} = I_{M3}$$

$$I_{L1} = I_{L2} = I_{L3}$$

$$I_{S1} = I_{S2} = I_{S3}$$

Las tres intensidades que circulan por la línea que viene del alternador se pueden calcular a partir de las siguientes expresiones:

$$\overline{I_1} = \overline{I_{M1}} + \overline{I_{L1}} + \overline{I_{S1}} \tag{2}$$

$$\overline{I_2} = \overline{I_{M2}} + \overline{I_{L2}} + \overline{I_{S2}} \tag{3}$$

$$\overline{I_3} = \overline{I_{M3}} + \overline{I_{L3}} + \overline{I_{S3}} \tag{4}$$

Los valores eficaces de las intensidades que toma de la línea cada receptor son:

$$I_M = \frac{20 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 70 \cdot 0.85 \cdot 0.9} = 91.63 \text{ A}$$

$$I_L = \frac{60 \cdot 10 \cdot 3.5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 70 \cdot 1} = 10 \text{ A}$$

$$I_S = \sqrt{3} \cdot 10 = 17.32 \text{ A}$$

y las expresiones vectorial de dichas intensidades son:

$$\overline{I_{M1}} = 91.63 \left| \underline{90^o - \arccos 0.85} \right. = 91.63 \left| \underline{58.21^o} \right. = 48.27 + j\,77.88$$

$$\overline{I_{M2}} = 91.63 \left| \underline{298.21^o} \right. = 43.31 - j\,80.75$$

$$\overline{I_{M3}} = 91.63 \left| \underline{178.21^o} \right. = -91.58 + j\,2.86$$

$$\overline{I_{L1}} = 10 \left| \underline{90^o - \arccos 1} \right. = 10 \left| \underline{90^o} \right. = j10$$

$$\overline{I_{L2}} = 10 \left| \underline{330^o} \right. = 8.66 - j\,5$$

$$\overline{I_{L3}} = 10 \left| \underline{210^o} \right. = -8.66 - j\,5$$

$$\overline{I_{S1}} = 17.32 \left| \underline{90^o - \arccos 1} \right. = 17.32 \left| \underline{90^o} \right. = j17.32$$

$$\overline{I_{S2}} = 17.32 \left| \underline{330^o} \right. = 15 - j\,8.66$$

$$\overline{I_{S3}} = 17.32 \left| \underline{210^o} \right. = -15 - j\,8.66$$

Por lo tanto, de acuerdo a las expresiones (2), (3) y (4), las tres intensidades compuestas valen:

$$\overline{I_1} = 48.27 + j\,77.88 + j10 + j17.32 = 48.27 + j105.20 = 115.75 \left| \underline{65.35^o} \right.$$

$$\overline{I_2} = 43.31 - j\,80.75 + 8.66 - j\,5 + 15 - j\,8.66 = 66.97 - j\,94.41 = 115.75 \left| \underline{305.35^o} \right.$$

$$\overline{I_3} = -91.58 + j\,2.86 - 8.66 - j\,5 - 15 - j\,8.66 = -115.24 - j\,10.80 = 115.75 \left| \underline{185.35^o} \right.$$

Así, la intensidad que suministra el alternador es:

$$I = 115.75 \text{ A}$$

y su desfase:

$$65.35^o = 90^o - \varphi$$

$$\varphi = 24.65^o$$

c) Si se toma la conexión de los vatímetros de forma que las bobinas amperimétricas estén conectadas en las fases 1 y 2, las potencias activas y reactivas se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$\overline{S_1} = \overline{V_1} \cdot \overline{I}^{\cup}_2$$

$$\overline{S_2} = -\overline{V_2} \cdot \overline{I}^{\cup}_1$$

siendo $\breve{I}_1$ e $\breve{I}_2$ los conjugados de los vectores $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$, respectivamente.

$$\bar{V}_1 = 70 \cdot \sqrt{3} \angle 0^o$$

$$-\bar{V}_2 = 70 \cdot \sqrt{3} \angle 60^o$$

$$\breve{I}_1 = 115.75 \angle -65.35^o$$

$$\breve{I}_2 = 115.75 \angle 54.65^o$$

luego:

$$\bar{S}_1 = 70 \cdot \sqrt{3} \angle 0^o \cdot 115.75 \angle 54.65^o = 14033.94 \angle 54.65^o = 8119.61 + j11446.54$$

$$\bar{S}_2 = 70 \cdot \sqrt{3} \angle 60^o \cdot 115.75 \angle -65.35^o = 14033.94 \angle -5.35^o = 13972.80 - j1308.52$$

La potencia activa es:

$$P = P_1 + P_2 = 8119.61 + 13972.80 = 22092.41\,W$$

$$P = 22092.41\,W$$

valor coincidente con el obtenido en el apartado a).

En cuanto a la potencia reactiva:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 11446.54 - 1308.52 = 10138.02\,VAr$$

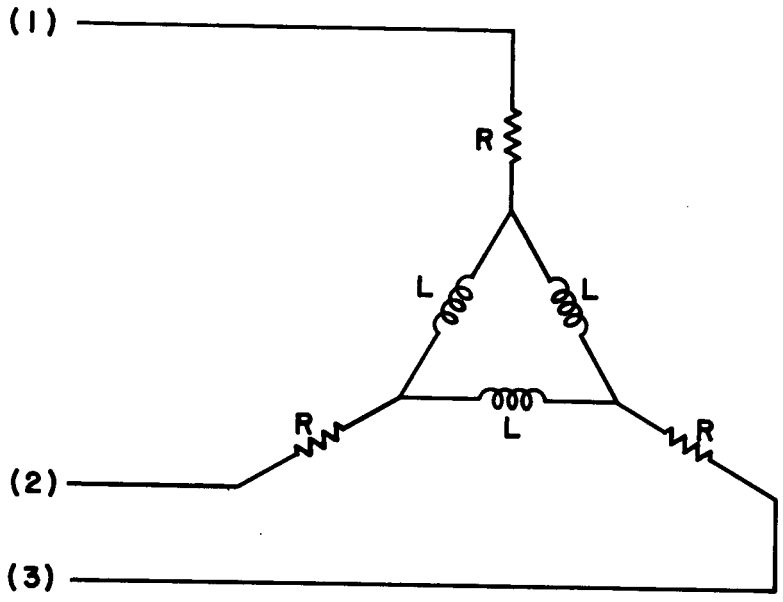
$$Q = 10138.02\,VAr$$

PROBLEMA Nº 15

Sea el receptor trifásico de la figura, en el que las tres bobinas, de resistencia despreciable, tienen una inductancia de 1/3.14 H y las tres resistencias tienen un valor de 7 Ω.

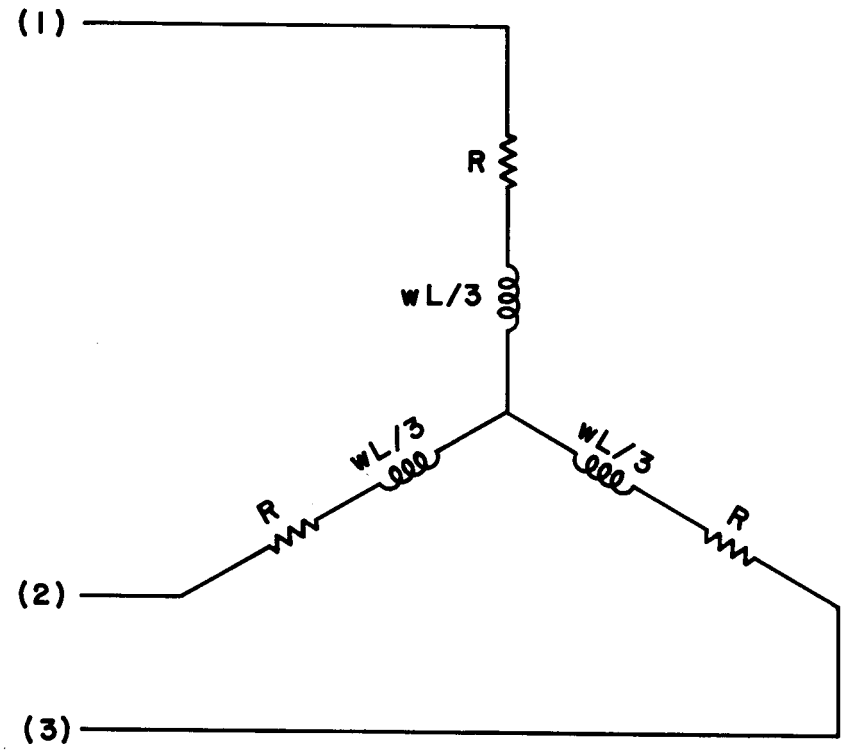
El valor eficaz de la tensión aplicada V es de 220 V, siendo la frecuencia de 50 Hz. Sabiendo que las fases se suceden en el orden 1, 2 y 3 hallar:

a) intensidad que circula por cada hilo de la línea.
b) potencia activa absorbida por la instalación, calculada a partir de las lecturas de dos vatímetros monofásicos conectados según el método de los dos vatímetros, con las bobinas amperimétricas intercaladas en las fases 1 y 2.
c) diagrama vectorial de tensiones e intensidades, tomando V_1 como origen de fases.



Solución

a) Se trata de un sistema equilibrado en el que las tres bobinas conectadas en triángulo se pueden reemplazar por otras tres conectadas en estrella, cuya reactancia inductiva sea $L \cdot \omega/3$, con lo que el circuito equivalente sería:



Cada una de las ramas de esta estrella tiene una impedancia:

$$\bar{Z} = R + jX = 7 + j\frac{\frac{1}{3.14} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}{3} = 7 + j\,33.35 = 34.06 \angle 78.14^{\circ}$$

Las expresiones complejas de las tensiones simples, a las cuales quedan conectadas las impedancias equivalentes de cada rama, son:

$$\bar{U}_1 = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 90^o = 127 \angle 90^o$$

$$\bar{U}_2 = 127 \angle 330^o$$

$$\bar{U}_3 = 127 \angle 210^o$$

Por lo tanto, las intensidades que circulan por cada hilo de la línea valen:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}} = \frac{127 \angle 90^o}{34.06 \angle 78.14^o} = 3.73 \angle 11.86^o$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}} = \frac{127 \angle 330^o}{34.06 \angle 78.14^o} = 3.73 \angle 251.86^o$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}} = \frac{127 \angle 210^o}{34.06 \angle 78.14^o} = 3.73 \angle 131.86^o$$

$$\bar{I}_1 = 3.73 \angle 11.86^o \qquad \bar{I}_2 = 3.73 \angle 251.86^o \qquad \bar{I}_3 = 3.73 \angle 131.86^o$$

b) Las lecturas de los dos vatímetros monofásicos conectados según el método de los dos vatímetros son:

$$W_1 = V_2 \cdot I_1 \cdot \cos(-V_2, I_1)$$

$$W_2 = V_1 \cdot I_2 \cdot \cos(V_1, I_2)$$

y por tratarse de un sistema equilibrado:

$$W_1 = V \cdot I \cdot \cos(30^o - \varphi)$$

$$W_2 = V \cdot I \cdot \cos(30^o + \varphi)$$

siendo el desfase en la impedancia equivalente de cada rama de la estrella, es decir:

$$\varphi = 78.14^o$$

Por lo tanto, las lecturas de los dos vatímetros son:

$$W_1 = 220 \cdot 3.73 \cdot \cos(30^o - 78.14^o) = 547.60\ W$$

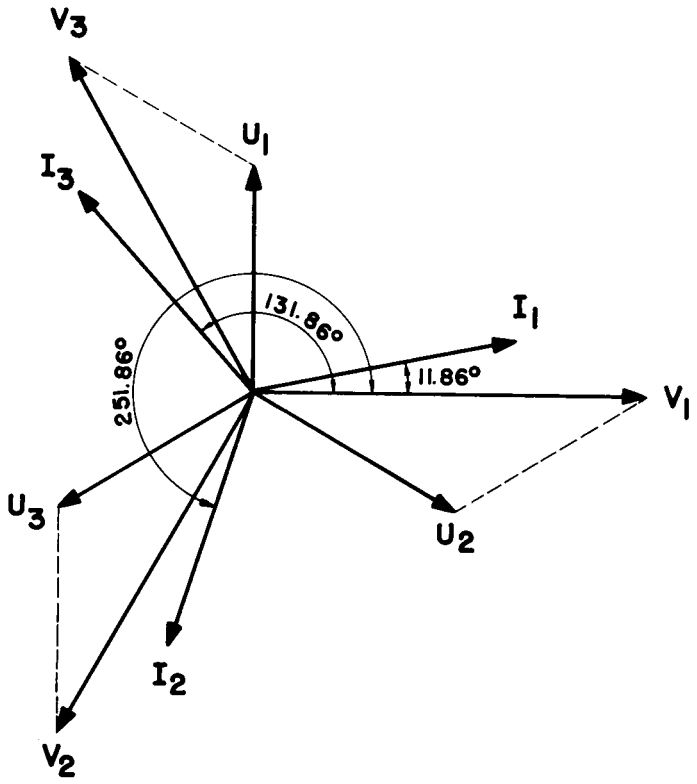
$$W_2 = 220 \cdot 3.73 \cdot \cos(30^o + 78.14^o) = -255.49\ W$$

resultando que la potencia activa absorbida por el receptor es:

$$P = W_1 + W_2 = 547.60 - 255.49 = 292.11\ W$$

$$P = 292.11\ W$$

c) A la vista de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, el diagrama vectorial de tensiones e intensidades resulta:



PROBLEMA Nº 16

Un taller está alimentado por una red trifásica 220/380 V y 50 Hz.

Para construir un radiador de calefacción se han adquirido tres resistencias idénticas, cada una de las cuales proporciona 1900 W cuando la tensión entre sus bornes es de 380 V. En el intervalo de funcionamiento la variación de la resistencia con la temperatura es despreciable. Se pide:

a) ¿cómo se deben conectar las tres resistencias para construir un receptor trifásico equilibrado, proporcionando cada uno de sus elementos su potencia nominal?. Determinar:
   - la corriente en la línea.
   - el precio de coste por hora de funcionamiento, a 4 ptas/kWh.
   - la cantidad de calor producida en kCal.

b) en caso de montaje en estrella, se desconecta el fusible correspondiente a la fase T. Determinar:
   - la corriente que circula por el neutro si, antes de esta desconexión, el centro de la estrella estaba unido al neutro de la red.
   - la potencia consumida por el conjunto de los dos elementos y la corriente en los hilos R y S, si, por el contrario, el centro de la estrella no está unido al neutro.

Solución

a) Para que las resistencias proporcionen su potencia nominal se deben conectar a 380 V, tal como indica el enunciado del problema. Esta tensión se consigue conectándolas en triángulo, puesto que de esta manera se les aplica la tensión compuesta de la línea que es justamente 380 V.

La intensidad en cada hilo de la línea vale:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}\cdot V \cdot \cos\varphi} = \frac{3\cdot 1900}{\sqrt{3}\cdot 380 \cdot 1} = 8.66 \text{ A}$$

$$I = 8.66 \text{ A}$$

El precio por hora de funcionamiento es:

$$C = P \cdot t \cdot q = 3 \cdot 1900\ W \cdot 1h \cdot 4\ ptas/1000\ Wh = 22.8\ ptas$$

$$C = 22.8\ ptas$$

En cuanto al calor desprendido en una hora de funcionamiento:

$$Q = P \cdot t = 3 \cdot 1900 \frac{J}{s} \cdot 3600\ s = 20520\ kJ = 4924.8\ kCal$$

$$Q = 4924.8\ kCal$$

b) Si en caso de montaje en estrella se funde el fusible de la fase T y el punto neutro del receptor está unido al de la red, las dos resistencias unidas a las fases R y S seguirían quedando conectadas a la tensión simple U y la intensidad que circula por el neutro sería:

$$\overline{I_N} = \overline{I_1} + \overline{I_2}$$

siendo:

$$I_1 = I_2 = \frac{8.66}{3} = 2.89\ A$$

ya que un receptor conectado en estrella absorbe tres veces menos intensidad que si se conecta en triángulo a la misma línea, tal como se demostró en el problema nº 5.

Como se sabe que la potencia absorbida por cada resistencia en caso de estar conectada a 380 V es de 1900 W, resulta que el valor de cada resistencia es:

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{380^2}{1900} = 76\ \Omega$$

el valor de I_1 e I_2 también se podría haber calculado de la siguiente manera:

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{76} = 2.89\ A$$

Por tratarse de un receptor resistivo, las intensidades I_1 e I_2 están en fase con las tensiones simples U_1 y U_2, respectivamente, y, por tanto, su suma vectorial estará en fase con $-U_3$ siendo su valor:

$$I_N = 2.89\ A$$

Si no existe unión eléctrica entre el neutro del receptor y el de la red, las dos resistencias unidas a las fases R y S quedarían en serie y conectadas a la tensión compuesta V, circulando por el conjunto una intensidad de:

$$I = \frac{V}{2 \cdot R} = \frac{380}{2 \cdot 76} = 2.5 \text{ A}$$

$$I = 2.5 \text{ A}$$

siendo éste el valor eficaz de la intensidad que circula por los hilos R y S.

En cuanto a la potencia consumida por el conjunto de los dos elementos:

$$P = V \cdot I = 380 \cdot 2.5 = 950 \text{ W}$$

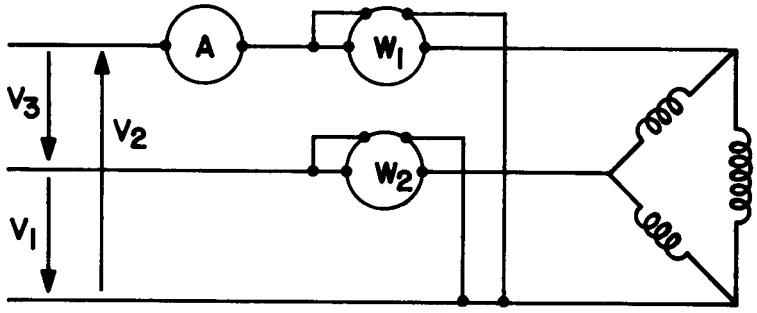
$$P = 950 \text{ W}$$

PROBLEMA Nº 17

Tres receptores con R y L idénticos se conectan en triángulo a una red trifásica de 200 V de tensión entre fases, tal como se muestra en la figura.

El amperímetro A marca 83.4 A y los vatímetros W_1 y W_2 16000 y 4000 W, respectivamente. Sabiendo que la frecuencia de la red es de 50 Hz, se desea calcular:

a) factor de potencia de los receptores.
b) resistencia y coeficiente de autoinducción de los tres receptores.
c) indicaciones del amperímetro y vatímetros si los tres receptores se conectan en estrella.



Solución

a) Las lecturas de los dos vatímetros son:

$$W_1 = V_2 \cdot I_1 \cdot \cos(-V_2, I_1) \quad (1)$$

$$W_2 = V_1 \cdot I_2 \cdot \cos(V_1, I_2) \quad (2)$$

Al ser el receptor equilibrado:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I \quad (3)$$

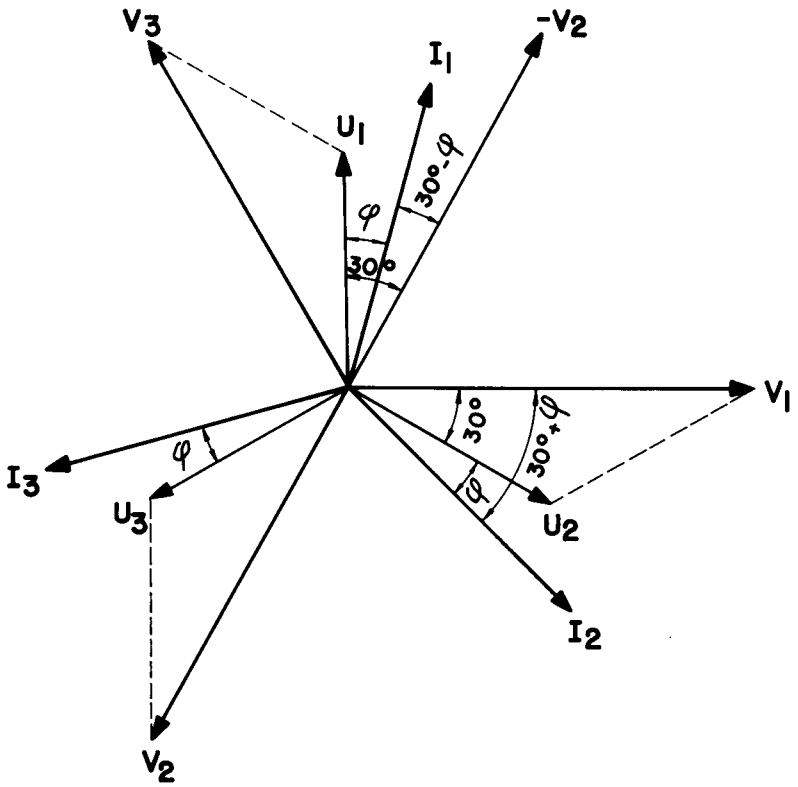
Por serlo también la línea:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V \tag{4}$$

Sobre el diagrama vectorial de tensiones e intensidades se observa que los ángulos que forman las intensidades y tensiones que figuran en las expresiones (1) y (2) son 30º - y 30º + , respectivamente, por lo que teniendo en cuenta además las igualdades (3) y (4) dichas expresiones quedan de la forma:

$$W_1 = V \cdot I \cdot \cos(30^\circ - \varphi) \tag{5}$$

$$W_2 = V \cdot I \cdot \cos(30^\circ + \varphi) \tag{6}$$



Desarrollando las ecuaciones anteriores:

$$W_1 = V \cdot I \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos\varphi + V \cdot I \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

$$W_2 = V \cdot I \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos\varphi - V \cdot I \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

Sumando y restando miembro a miembro:

$$W_1 + W_2 = 2 \cdot V \cdot I \cdot \cos 30^o \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$W_1 - W_2 = 2 \cdot V \cdot I \cdot \operatorname{sen} 30^o \cdot \operatorname{sen} \varphi = V \cdot I \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Dividiendo las dos igualdades anteriores resulta que:

$$\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{3} \cdot \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$$

Y finalmente particularizando para los datos del ejercicio:

$$\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{3} \cdot \frac{16000 - 4000}{16000 + 4000} = 1.04$$

$$\varphi = 46.10^o$$

por lo que el factor de potencia de los receptores vale:

$$\cos \varphi = 0.69$$

El factor de potencia también se podría haber calculado como sigue:

$$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V \cdot I}$$

donde P es igual a la suma de la lectura de los dos vatímetros, ya que están conectados siguiendo el método de los dos vatímetros. Luego:

$$\cos \varphi = \frac{20000}{\sqrt{3} \cdot 200 \cdot 83.4} = 0.69$$

$$\cos \varphi = 0.69$$

b) Para determinar la resistencia y el coeficiente de autoinducción de cada receptor en primer lugar se determinará el valor de la impedancia.

La intensidad que circula por cada receptor vale:

$$J = \frac{I}{\sqrt{3}} = \frac{83.4}{\sqrt{3}} = 48.15 \text{ A}$$

Y el valor de la impedancia es:

$$Z = \frac{V}{J} = \frac{200}{48.15} = 4.15\ \Omega$$

Finalmente, los valores de las resistencias y reactancias son:

$$R = Z \cdot \cos\varphi = 4.15 \cdot 0.69 = 2.88\ \Omega$$

$$X = Z \cdot \operatorname{sen}\varphi = 4.15 \cdot 0.72 = 2.99\ \Omega$$

y el coeficiente de autoinducción:

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{2.99}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 9.52 \cdot 10^{-3}\ H$$

$$R = 2.88\ \Omega \qquad L = 9.52 \cdot 10^{-3}\ H$$

c) Si los receptores se conectaran en estrella la intensidad absorbida sería la tercera parte, por consiguiente el amperímetro indicaría:

$$I' = \frac{I}{3} = \frac{83.4}{3} = 27.8\ A$$

$$I' = 27.8\ A$$

Respecto a las lecturas de los dos vatímetros, de acuerdo a las expresiones (5) y (6):

$$W_1 = 200 \cdot 27.8 \cdot \cos(30^o - 46.10^o) = 5341.93\ W$$

$$W_2 = 200 \cdot 27.8 \cdot \cos(30^o + 46.10^o) = 1335.67\ W$$

$$W_1 = 5341.93\ W \qquad W_2 = 1335.67\ W$$

Su suma es la potencia absorbida por el receptor, ya que los dos vatímetros están conectados siguiendo el método de los dos vatímetros:

$$P = W_1 + W_2 = 5341.93 + 1335.67 = 6677.60\ W$$

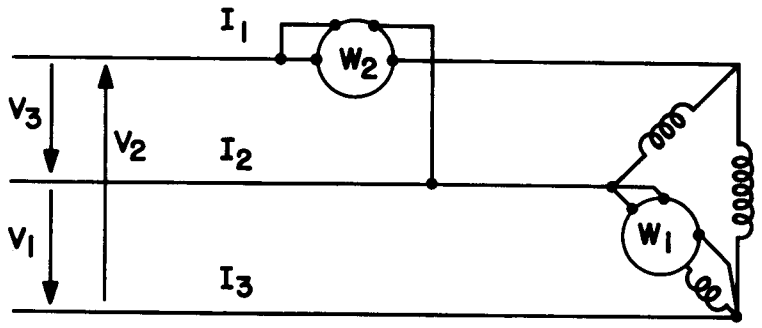
es decir, la tercera parte de 20000 W, que es la potencia absorbida por el receptor conectado en triángulo. La ligera diferencia que resulta es debida al error arrastrado en las operaciones.

PROBLEMA Nº 18

Un receptor trifásico está conectado en triángulo a una red de tensión compuesta 220 V y frecuencia 50 Hz.

Dos vatímetros monofásicos están conectados como se indica en la figura. Se sabe que la resistencia de cada devanado del receptor es de 10 Ω y la intensidad que toma de la línea de 17.3 A.

Calcular las lecturas que darán los vatímetros W_1 y W_2.



Solución

Las ecuaciones que dan las lecturas de los dos vatímetros son:

$$W_1 = V_1 \cdot J_1 \cdot \cos(V_1, J_1)$$

$$W_2 = V_3 \cdot I_1 \cdot \cos(V_3, I_1)$$

que por tratarse de un receptor equilibrado, pueden expresarse de la siguiente forma:

$$W_1 = V \cdot J \cdot \cos(V_1, J_1)$$

$$W_2 = V \cdot I \cdot \cos(V_3, I_1)$$

Dibujando el diagrama vectorial de tensiones e intensidades se observa que el ángulo que forma V_1 con J_1 es precisamente el desfase en el receptor; y el ángulo que forma V_3 con I_1 es de 30 + , luego:

$$W_1 = V \cdot J \cdot \cos\varphi \qquad (1)$$

$$W_2 = V \cdot I \cdot \cos(30^o + \varphi) \qquad (2)$$

donde todas las magnitudes son conocidas excepto el ángulo de desfase φ.

El valor de la impedancia de cada receptor es:

$$Z = \frac{V}{J} = \frac{220}{\frac{17.3}{\sqrt{3}}} = 22\,\Omega$$

Por lo tanto, la reactancia y el desfase de cada receptor valen:

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{22^2 - 10^2} = 19.6\,\Omega$$

$$\text{tang}\varphi = \frac{X}{R} = \frac{19.6}{10} = 1.96 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 62.97^o$$

De acuerdo a las expresiones (1) y (2), las lecturas de los dos vatímetros resultan:

$$W_1 = 220 \cdot \frac{17.3}{\sqrt{3}} \cdot \cos 62.97^o = 999.83\ W$$

$$W_2 = 220 \cdot 17.3 \cdot \cos(30^o + 62.97^o) = -197.14\ W$$

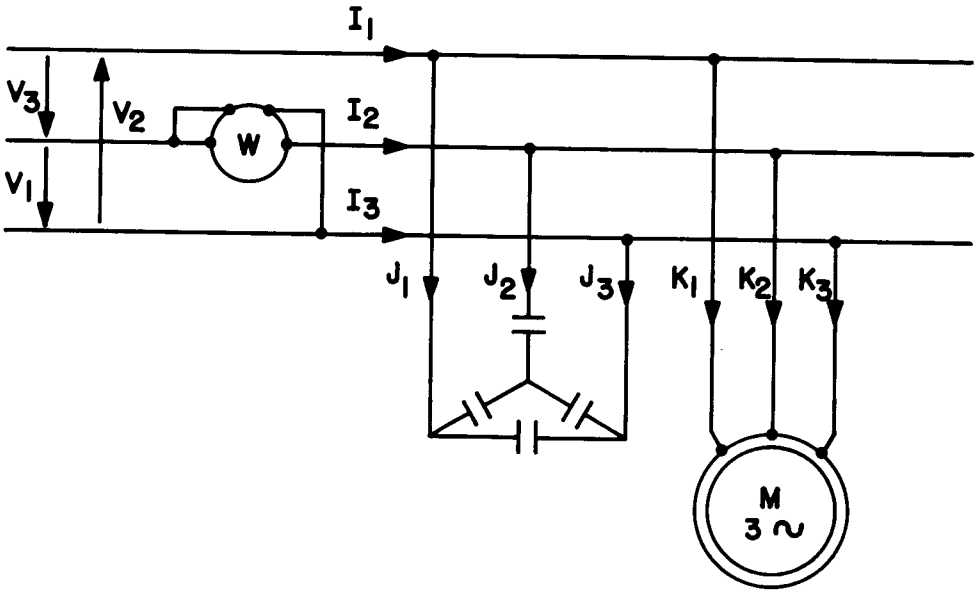
$$W_1 = 999.83\ W \qquad W_2 = -197.14\ W$$

PROBLEMA Nº 19

La instalación de la figura representa una línea trifásica a la que se conecta un motor trifásico de potencia útil 10 CV, rendimiento 0.736 y factor de potencia 0.8. Se conecta a la línea un equipo de condensadores de capacidad $5 \cdot 10^{-4}$ F conectados en estrella.

Sabiendo que la tensión de línea es de 220 V y la frecuencia de 50 Hz, calcular:

a) lectura del vatímetro conectado a la línea.
b) potencia activa y reactiva absorbida por la instalación.



Solución

a) La lectura del vatímetro es:

$$W = V_1 \cdot I_2 \cdot \cos(V_1, I_2)$$

Ahora bien:

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_2 + \bar{K}_2 \qquad (1)$$

Y por ser los dos receptores equilibrados se verifica:

$$J_1 = J_2 = J_3 = J \qquad K_1 = K_2 = K_3 = K$$

siendo los valores eficaces de las intensidades que absorben los dos receptores los siguientes:

$$J = \frac{U}{X_c} = \frac{\frac{V}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{C \cdot \omega}} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}} = 19.95 \text{ A}$$

$$K = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V \cdot \cos\varphi} = \frac{10 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.8 \cdot 0.736} = 32.8 \text{ A}$$

Las expresiones complejas de las intensidades anteriores son:

$$\bar{J}_1 = 19.95 \left| \underline{180^o} \right.$$

$$\bar{J}_2 = 19.95 \left| \underline{60^o} \right.$$

$$\bar{J}_3 = 19.95 \left| \underline{300^o} \right.$$

$$\bar{K}_1 = 32.8 \left| \underline{90^o - \arccos 0.8} \right. = 32.8 \left| \underline{53.13^o} \right.$$

$$\bar{K}_2 = 32.8 \left| \underline{-66.87^o} \right.$$

$$\bar{K}_3 = 32.8 \left| \underline{173.13^o} \right.$$

Por consiguiente, por la ecuación (1), la intensidad que circula por el segundo hilo de la línea vale:

$$\bar{I}_2 = 19.95 \left| \underline{60^o} + 32.8 \right| \underline{-66.87^o} = 26.24 \left| \underline{330.59^o} \right. \qquad (1)$$

El ángulo que forma I_2 con V_1 es igual a 29.41º.

Finalmente, la lectura del vatímetro vale:

$$W = 220 \cdot 26.24 \cdot \cos 29.41^o = 5028.85 \text{ W}$$

$$W = 5028.85 \text{ W}$$

b) La potencia activa absorbida por la instalación es la correspondiente al motor trifásico, es decir:

$$P = \frac{10 \cdot 736}{0.736} = 10000 \text{ W}$$

$$P = 10000 \text{ W}$$

En cuanto a la potencia reactiva:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 26.24\right)^2 - 10000^2} = 0 \text{ VAr}$$

$$Q = 0 \text{ VAr}$$

PROBLEMA Nº 20

Una red trifásica se compone de un generador trifásico que suministra una tensión a la línea de 115 V y de un sistema receptor consistente en:

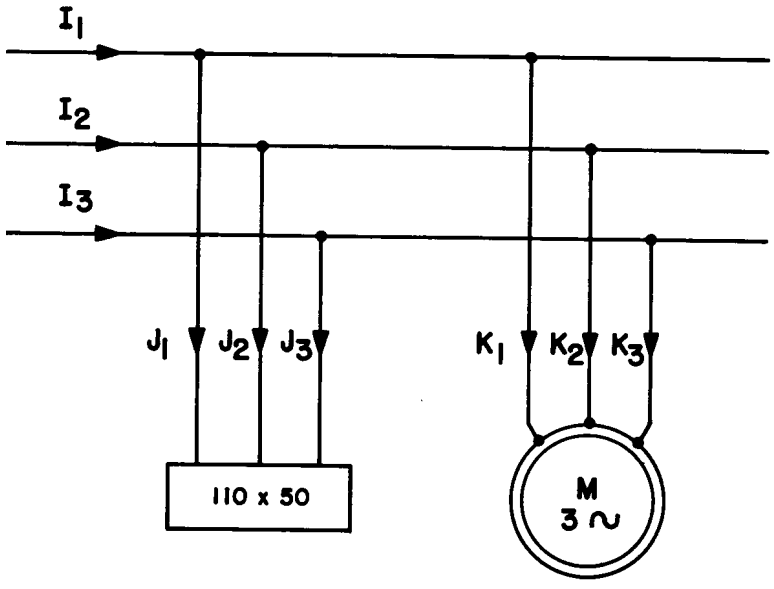
- 210 lámparas de 50 W cada una y tensión nominal 115 V, conectadas en tres grupos de 70.
- 1 motor trifásico de 10 CV de potencia útil, rendimiento 90 % y factor de potencia 0.8.

Se pide:

a) corriente que toman el motor trifásico y las lámparas de la línea.
b) corriente que suministra el generador.
c) factor de potencia del generador suponiendo que no hay pérdidas de tensión en la línea que une el generador con los receptores.
d) lecturas de dos vatímetros conectados a la línea para medir la potencia consumida por los receptores.

Solución

a) El esquema de la instalación se muestra en la siguiente figura.



Las intensidades que toman de la línea el motor y las lámparas son, respectivamente:

$$K = \frac{P_u}{\sqrt{3} \cdot V \cdot \cos\varphi \cdot \eta} = \frac{10 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 115 \cdot 0.8 \cdot 0.9} = 51.32\ A$$

$$J = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V \cdot \cos\varphi} = \frac{210 \cdot 50}{\sqrt{3} \cdot 115 \cdot 1} = 52.71 A$$

$$K = 51.32\ A \qquad J = 52.71 A$$

ya que el factor de potencia de las lámparas es igual a la unidad.

b) La corriente que suministra el generador por cada hilo de la línea es:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_1 + \bar{K}_1 \quad (1)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_2 + \bar{K}_2 \quad (2)$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_3 + \bar{K}_3 \quad (3)$$

y por ser los dos receptores equilibrados se verifica:

$$J_1 = J_2 = J_3 = J$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

Las expresiones complejas de las intensidades que toman de la línea los dos receptores son:

$$\bar{J}_1 = 52.71 \left| \underline{90^o - \varphi} = 52.71 \right| \underline{90^o}$$

$$\bar{J}_2 = 52.71 \left| \underline{330^o} \right.$$

$$\bar{J}_3 = 52.71 \left| \underline{210^o} \right.$$

$$\bar{K}_1 = 51.32 \left| \underline{90^o - \varphi} = 51.32 \right| \underline{53.13^o}$$

$$\bar{K}_2 = 51.32 \left| \underline{-66.87^o} \right.$$

$$\bar{K}_3 = 51.32 \left| \underline{173.13^o} \right.$$

Así, por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\bar{I}_1 = 52.71\angle 90^\circ + 51.32\angle 53.13^\circ = j52.71 + 30.79 + j41.06 = 30.79 + j93.77 = 98.69\angle 71.82^\circ$$

$$\bar{I}_2 = 52.71\angle 330^\circ + 51.32\angle -66.87^\circ = 45.65 - j26.36 + 20.16 - j47.19 = 65.81 - j73.55 = 98.69\angle -48.18^\circ$$

$$\bar{I}_3 = 52.71\angle 210^\circ + 51.32\angle 173.13^\circ = -45.65 - j26.36 - 50.95 + j6.14 = -96.6 - j20.22 = 98.69\angle 191.82$$

Por lo tanto, la corriente que suministra el generador vale:

$$I = 98.69\ A$$

c) El factor de potencia del generador se deduce a partir del argumento de la intensidad que suministra el generador por cada hilo de la línea, es decir:

$$90^\circ - \varphi' = 71.82^\circ$$

$$\varphi' = 18.18^\circ$$

luego:

$$\cos\varphi' = 0.95$$

d) Las lecturas de dos vatímetros monofásicos conectados a la línea según el método de los dos vatímetros para medir la potencia consumida por los receptores son:

$$W_1 = V \cdot I \cdot \cos(30^\circ - \varphi')$$

$$W_2 = V \cdot I \cdot \cos(30^\circ + \varphi')$$

Particularizando para los datos del ejercicio:

$$W_1 = 115 \cdot 98.69 \cdot \cos(30^\circ - 18.18^\circ) = 11108.70\ W$$

$$W_2 = 115 \cdot 98.69 \cdot \cos(30^\circ + 18.18^\circ) = 7567.66\ W$$

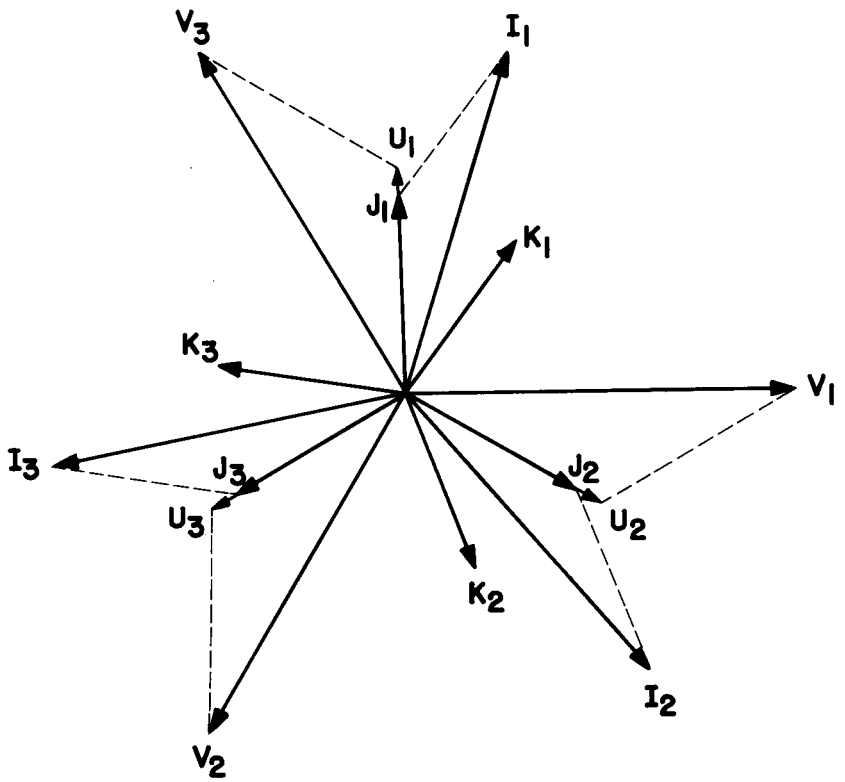
La potencia absorbida por los dos receptores se obtiene sumando las dos lecturas anteriores:

$$P = W_1 + W_2 = 18676.36\ W$$

$$P = 18676.36\ W$$

Método gráfico

Otra forma de resolver este problema consiste en emplear el método gráfico. En este caso, se situarían las intensidades J y K en un diagrama vectorial a escala, y mediante la composición de los vectores se determinaría el valor de la intensidad que suministra el generador.



Se ha empleado para las intensidades una escala de 1:20. Así, sobre el gráfico se deduce:

$$I_1 = 4.85\,\text{cm} = 4.85 \cdot 20 = 97\,\text{A}$$

$$I_1 = 97\,\text{A}$$

Sobre el gráfico también se obtiene el valor del ángulo φ' que es de aproximadamente 18º.