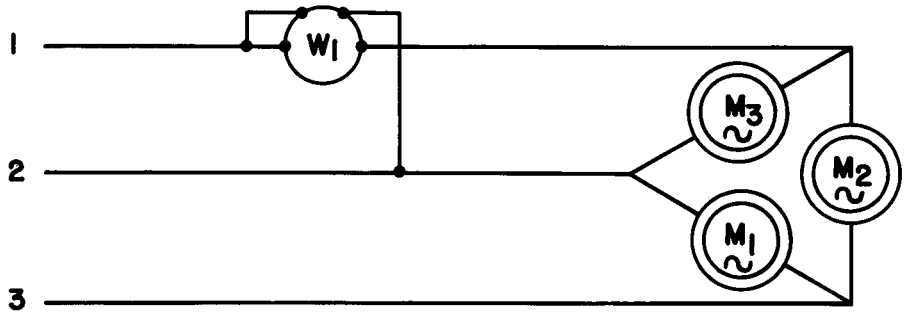
PROBLEMA Nº 21

Se instalan tres motores trifásicos iguales tal como se indica en el esquema, siendo $W_1$ un vatímetro monofásico que marca 10000 W.

La línea tiene una tensión compuesta de 220 V y el conjunto de los tres motores desarrolla 40 CV en total con un rendimiento del 80 %.

Calcular la intensidad que circula por cada hilo de la línea trifásica cuando el segundo motor se desconecta.




Solución

La lectura del vatímetro es:

$$W_1 = V_3 \cdot I_1 \cdot \cos(V_3, I_1) = V \cdot I \cdot \cos(30^o + \varphi)$$

por tratarse de un receptor equilibrado.

Por otra parte:

$$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi$$

Si las dos igualdades anteriores se particularizan para los datos del ejercicio resulta que:

$$10000 = 220 \cdot I \cdot \cos(30^o + \varphi)$$

$$\frac{40 \cdot 736}{0.8} = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot I \cdot \cos\varphi$$

sistema de ecuaciones cuya resolución proporciona el valor de I y cos :

$$\cos\varphi = 0.78 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 38.33^o$$

$$I = 123.11\ A$$

El valor eficaz de la intensidad que circula por cada motor es:

$$J = \frac{I}{\sqrt{3}} = \frac{123.11}{\sqrt{3}} = 71.08\ A$$

Las expresiones que relacionan las intensidades que circulan por la línea en función de las que circulan por los motores son:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1$$

Cuando el segundo motor se desconecta la intensidad que circula por él es nula, es decir $J_2 = 0$, y las expresiones anteriores quedan de la siguiente forma:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 \qquad (1)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3 \qquad (2)$$

$$\bar{I}_3 = -\bar{J}_1 \qquad (3)$$

Las expresiones complejas de las intensidades que circulan por los motores son:

$$\bar{J}_1 = 71.08 \left| \underline{-38.33^o} \right.$$

$$\bar{J}_2 = \bar{J}_1 \cdot \bar{A}^2 = 71.08 \left| \underline{-38.33^o} \right. \cdot 1 \left| \underline{240^o} \right. = 71.08 \left| \underline{201.67^o} \right.$$

$$\bar{J}_3 = \bar{J}_1 \cdot \bar{A} = 71.08 \left| \underline{-38.33^o} \right. \cdot 1 \left| \underline{120^o} \right. = 71.08 \left| \underline{81.67^o} \right.$$

Y, por lo tanto, de acuerdo a las expresiones (1), (2) y (3) las intensidades que circulan por los hilos de la línea cuando el segundo motor se desconecta son:

$$\bar{I}_1 = 71.08 \angle 81.67^\circ$$

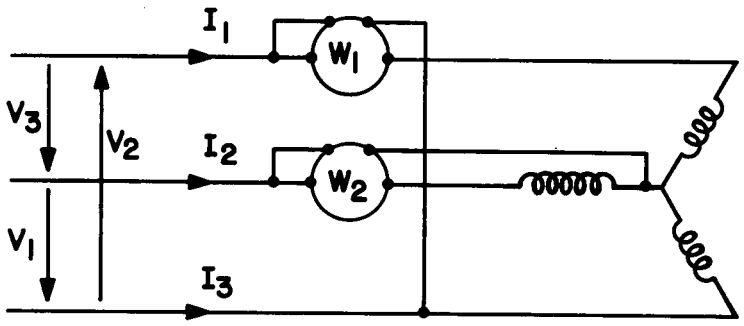
$$\bar{I}_2 = 71.08 \angle -38.33^\circ - 71.08 \angle 81.67^\circ = 123.11 \angle -68.33^\circ$$

$$\bar{I}_3 = 71.08 \angle 141.67^\circ$$

PROBLEMA Nº 22

Un receptor trifásico formado por tres bobinas está conectado en estrella a una línea trifásica de 380 V de tensión compuesta y 50 Hz de frecuencia. Cada bobina tiene una resistencia de 10 Ω y absorbe de la línea 20 A.

Calcular las lecturas de los vatímetros $W_1$ y $W_2$.




Solución

Las lecturas de los vatímetros son:

$$W_1 = V_2 \cdot I_1 \cdot \cos(-V_2, I_1)$$

$$W_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos(U_2, I_2)$$

Teniendo en cuenta que se trata de un receptor equilibrado las dos expresiones anteriores se simplifican resultando:

$$W_1 = V \cdot I \cdot \cos(30^o - \varphi) \quad (1)$$

$$W_2 = U \cdot I \cdot \cos\varphi \quad (2)$$

$$U = \frac{V}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219.39\ V$$

Para determinar se sabe que:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{219.39}{20} = 10.97\,\Omega$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{10.97^2 - 10^2} = 4.51\,\Omega$$

Por lo tanto:

$$\text{tang}\varphi = \frac{X}{R} = \frac{4.51}{10} = 0.451 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 24.28^o$$

Y las lecturas de los vatímetros, por las expresiones (1) y (2), son:

$$W_1 = 380 \cdot 20 \cdot \cos\left(30^o - 24.28^o\right) = 7562.10\,W$$

$$W_2 = 219.39 \cdot 20 \cdot \cos 24.28^o = 3999.87\,W$$

$$W_1 = 7562.10\,W$$

$$W_2 = 3999.87\,W$$

## PROBLEMA Nº 23

Tres cargas no equilibradas se conectan en triángulo a una línea trifásica de tensión compuesta 120 V. Las características de las cargas son las siguientes:

$$\overline{Z}_1 = 20$$

$$\overline{Z}_2 = 3 \cdot \sqrt{3} + j\,3$$

$$\overline{Z}_3 = 3 + j\,3 \cdot \sqrt{3}$$

Calcular:

a) valor de las intensidades en los tres hilos de la línea.

b) potencia total absorbida por el sistema.

c) ángulos que forman las intensidades de línea con las tensiones compuestas.

## Solución

a) Por ser las tres cargas distintas el receptor es desequilibrado.

Las expresiones complejas de las tensiones de línea son:

$$\overline{V}_1 = \overline{V} \qquad \overline{V}_2 = \overline{V} \cdot \overline{A}^2 \qquad \overline{V}_3 = \overline{V} \cdot \overline{A}$$

siendo:

$$\overline{V} = 120 \left| \underline{0^o} \right.$$

Por lo tanto:

$$\overline{V}_1 = 120 \left| \underline{0^o} \right.$$

$$\overline{V}_2 = 120 \left| \underline{0^o} \cdot 1 \right| \underline{240^o} = 120 \left| \underline{240^o} \right.$$

$$\overline{V}_3 = 120 \left| \underline{0^o} \cdot 1 \right| \underline{120^o} = 120 \left| \underline{120^o} \right.$$

Las impedancias en forma compleja son:

$$\overline{Z}_1 = 20 \left| \underline{0^o} \right.$$

$$\overline{Z}_2 = 6 \left| \underline{30^o} \right.$$

$$\overline{Z}_3 = 6 \left| \underline{60^o} \right.$$

Y, por lo tanto, las intensidades que circulan por cada una de las cargas valen:

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{120\,\angle 0^o}{20\,\angle 0^o} = 6\,\angle 0^o$$

$$\bar{J}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{120\,\angle 240^o}{6\,\angle 30^o} = 20\,\angle 210^o$$

$$\bar{J}_3 = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{120\,\angle 120^o}{6\,\angle 60^o} = 20\,\angle 60^o$$

Finalmente, el valor de las intensidades en los tres hilos de la línea es:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2 = 20\,\angle 60^o - 20\,\angle 210^o = 10 + j17.32 + 17.32 + j10 = 27.32 + j27.32 = 38.64\,\angle 45^o$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3 = 6\,\angle 0^o - 20\,\angle 60^o = 6 - 10 - j17.32 = -4 - j17.32 = 17.78\,\angle 257^o$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1 = 20\,\angle 210^o - 6\,\angle 0^o = -17.32 - j10 - 6 = -23.32 - j10 = 25.37\,\angle 203.21^o$$

$$\bar{I}_1 = 38.64\,\angle 45^o \qquad \bar{I}_2 = 17.78\,\angle 257^o \qquad \bar{I}_3 = 25.37\,\angle 203.21^o$$

b) Como las resistencias son los únicos elementos que disipan potencia, la potencia absorbida por el sistema será la suma de las que se disipan en las tres resistencias del receptor, es decir:

$$P = J_1^2 \cdot R_1 + J_2^2 \cdot R_2 + J_3^2 \cdot R_3 = 6^2 \cdot 20 + 20^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + 20^2 \cdot 3 = 3998.46\ W$$

$$P = 3998.46\ W$$

O también:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$$

$$\bar{S}_1 = 120\,\angle 0^o \cdot 6\,\angle 0^o = 720\,\angle 0^o$$

$$\bar{S}_2 = 120\,\angle 240^o \cdot 20\,\angle -210^o = 2400\,\angle 30^o$$

$$\bar{S}_3 = 120\,\angle 120^o \cdot 20\,\angle -60^o = 2400\,\angle 60^o$$

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = 5170.69\,\angle 39.35^o = 3998.42 + j3278.50$$

Luego:

$$P = 3998.42\ W$$

$$Q = 3278.50\ VAr$$

c) Los ángulos que forman las intensidades de línea, I, con las tensiones compuestas, V, son:

$$\varphi_1 = 45^o - 0^o = 45^o$$

$$\varphi_2 = 257^o - 240^o = 17^o$$

$$\varphi_3 = 203.21^o - 120^o = 83.21^o$$

$$\varphi_1 = 45^o \qquad \varphi_2 = 17^o \qquad \varphi_3 = 83.21^o$$

A continuación se realiza este problema por el método gráfico con el fin de que se puedan observar las ventajas del método complejo respecto de los otros métodos de cálculo de circuitos trifásicos.

Para no repetir las operaciones se aprovecharán los cálculos analíticos realizados anteriormente. El valor eficaz de las intensidades simples era:

$$J_1 = 6\ A \qquad J_2 = 20\ A \qquad J_3 = 20\ A$$

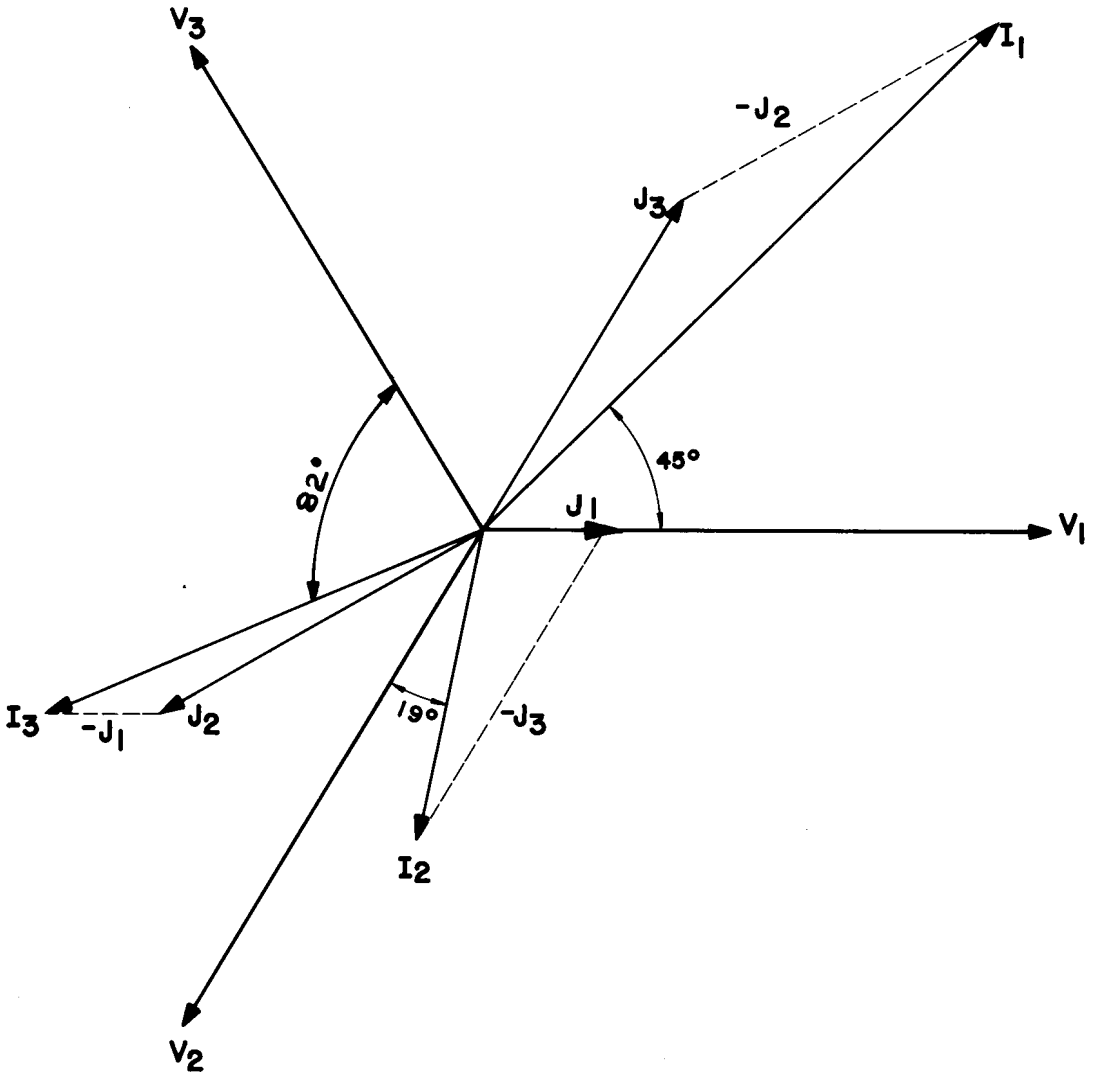
y los ángulos que forman las intensidades simples con las tensiones compuestas correspondientes 0º, 30º y 60º, respectivamente.

Se toma una escala para las intensidades de 1 mm = 0.4 A y se representan en el diagrama vectorial las intensidades simples. Por composición gráfica de dichas intensidades, de acuerdo a las siguientes ecuaciones, se obtiene el valor de las intensidades de línea:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1$$




Sobre el diagrama anterior se obtienen los siguientes valores para las intensidades compuestas:

$$I_1 = 9.7\,\text{cm} \cdot 4\,\frac{\text{A}}{\text{cm}} = 38.8\,\text{A}$$

$$I_2 = 4.4\,\text{cm} \cdot 4\,\frac{\text{A}}{\text{cm}} = 17.6\,\text{A}$$

$$I_3 = 6.4\,\text{cm} \cdot 4\,\frac{\text{A}}{\text{cm}} = 25.6\,\text{A}$$

Y también se pueden obtener los desfases pedidos en el apartado tercero:

$$\varphi_1 = 45^o \qquad \varphi_2 = 19^o \qquad \varphi_3 = 82^o$$

A la vista de los resultados se observan unas ligeras diferencias con respecto a los valores obtenidos por el método complejo, debidas a los errores en el dibujo. No obstante, dichas diferencias son aceptables.

Otra forma de realizar este problema sería utilizando el método analítico, resolviendo geométricamente el diagrama anterior. Para ello se proyectan las intensidades simples sobre las tensiones compuestas y las perpendiculares a ellas, cumpliéndose que:

$$I_1 = \sqrt{(J_3 \cdot \cos 60^o + J_2 \cdot \cos 30^o)^2 + (J_3 \cdot \operatorname{sen} 60^o + J_2 \cdot \operatorname{sen} 30^o)^2}$$

$$I_2 = \sqrt{(J_1 - J_3 \cdot \cos 60^o)^2 + (J_3 \cdot \operatorname{sen} 60^o)^2}$$

$$I_3 = \sqrt{(J_2 \cdot \cos 30^o + J_1)^2 + (J_2 \cdot \operatorname{sen} 30^o)^2}$$

Particularizando para los datos del problema:

$$I_1 = \sqrt{(20 \cdot \cos 60^o + 20 \cdot \cos 30^o)^2 + (20 \cdot \operatorname{sen} 60^o + 20 \cdot \operatorname{sen} 30^o)^2} = 38.63 \text{ A}$$

$$I_2 = \sqrt{(6 - 20 \cdot \cos 60^o)^2 + (20 \cdot \operatorname{sen} 60^o)^2} = 17.77 \text{ A}$$

$$I_3 = \sqrt{(20 \cdot \cos 30^o + 6)^2 + (20 \cdot \operatorname{sen} 30^o)^2} = 25.37 \text{ A}$$

Como puede observarse, en este caso los resultados son casi los mismos que mediante el método complejo, aunque hay que tener cuidado al resolver los triángulos y ver si proyectan positiva o negativamente. Los vectores que indican las intensidades simples hay que situarlos en el cuadrante correspondiente.

En cuanto a los ángulos que forman las intensidades de línea con las tensiones compuestas, se pueden obtener a partir del cociente de las proyecciones anteriores:

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{J_3 \cdot \operatorname{sen} 60^o + J_2 \cdot \operatorname{sen} 30^o}{J_3 \cdot \cos 60^o + J_2 \cdot \cos 30^o} = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 60^o + 20 \cdot \operatorname{sen} 30^o}{20 \cdot \cos 60^o + 20 \cdot \cos 30^o} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 45^o$$

$$\operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{J_3 \cdot \operatorname{sen} 60^o}{J_1 - J_3 \cdot \cos 60^o} = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 60^o}{6 - 20 \cdot \cos 60^o} = 4.33 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 76.99^o$$

$$\operatorname{tang}\alpha_3 = \frac{J_2 \cdot \operatorname{sen} 30^o}{J_1 + J_2 \cdot \cos 30^o} = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 60^o}{6 + 20 \cdot \cos 60^o} = 0.428 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 23.21^o$$

El primer ángulo es el que forma $V_1$ con $I_1$, por lo tanto es un ángulo pedido. El segundo es el que forma $I_2$ con $-V_1$; para obtener el que forma con $V_2$ hay que restarle el ángulo que forma $-V_1$ con $V_2$, que es 60º. El tercer ángulo es el que forma $I_3$ con $-V_1$; para calcular el que forma con $V_3$ hay que sumarle el ángulo que forma $-V_1$ con $V_3$, que es 60º. Por lo tanto:

$$\varphi_1 = 45^o$$

$$\varphi_2 = 76.99^o - 60^o = 16.99^o$$

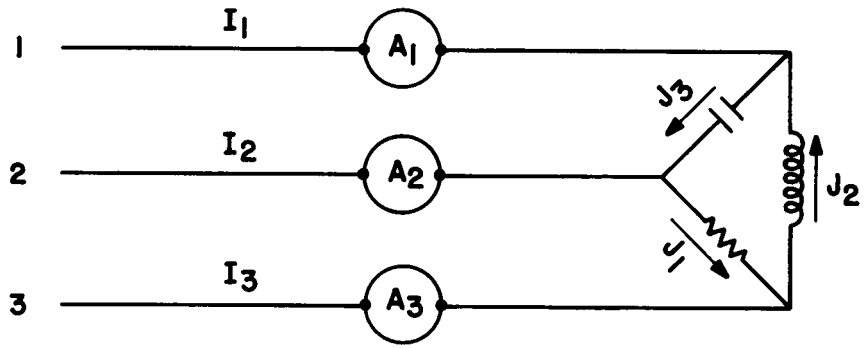
$$\varphi_3 = 23.21^o + 60^o = 83.21^o$$

Empleando el método analítico los resultados son prácticamente los mismos que mediante el método complejo, pero el procedimiento es más tedioso.

PROBLEMA Nº 24

Una línea trifásica de 220 V de tensión compuesta alimenta a tres receptores conectados en triángulo, tal como se muestra en la figura.

Sabiendo que se verifica $R = X_L = X_C = 10\,\Omega$, calcular las lecturas de los amperímetros $A_1$, $A_2$ y $A_3$.




Solución

Las lecturas de los amperímetros son $I_1$, $I_2$ e $I_3$, siendo las relaciones que ligan estas intensidades con las que circulan por los receptores las siguientes:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2 \qquad (1)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3 \qquad (2)$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1 \qquad (3)$$

Las expresiones complejas de las tensiones de línea son:

$$\bar{V}_1 = \bar{V} \qquad \bar{V}_2 = \bar{V} \cdot \bar{A}^2 \qquad \bar{V}_3 = \bar{V} \cdot \bar{A}$$

siendo:

$$\bar{V} = 220 \,\underline{|\, 0^\circ}$$

Luego:

$$\overline{V}_1 = 220 \angle 0^o$$

$$\overline{V}_2 = 220 \angle 240^o$$

$$\overline{V}_3 = 220 \angle 120^o$$

Las impedancias en forma compleja son:

$$\overline{Z}_1 = 10 \angle 0^o$$

$$\overline{Z}_2 = 10 \angle 90^o$$

$$\overline{Z}_3 = 10 \angle -90^o$$

Y, por lo tanto, las intensidades que circulan por cada uno de los receptores valen:

$$\overline{J}_1 = \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_1} = \frac{220 \angle 0^o}{10 \angle 0^o} = 22 \angle 0^o$$

$$\overline{J}_2 = \frac{\overline{V}_2}{\overline{Z}_2} = \frac{220 \angle 240^o}{10 \angle 90^o} = 22 \angle 150^o$$

$$\overline{J}_3 = \frac{\overline{V}_3}{\overline{Z}_3} = \frac{220 \angle 120^o}{10 \angle -90^o} = 22 \angle 210^o$$

Finalmente, por las expresiones (1), (2) y (3), el valor de las intensidades en los tres hilos de la línea es:

$$\overline{I_1} = 22 \angle 210^o - 22 \angle 150^o = -19.05 - j11 + 19.05 - j11 = 22 \angle -90^o$$

$$\overline{I}_2 = 22 \angle 0^o - 22 \angle 210^o = 22 + 19.05 + j11 = 42.5 \angle 15^o$$

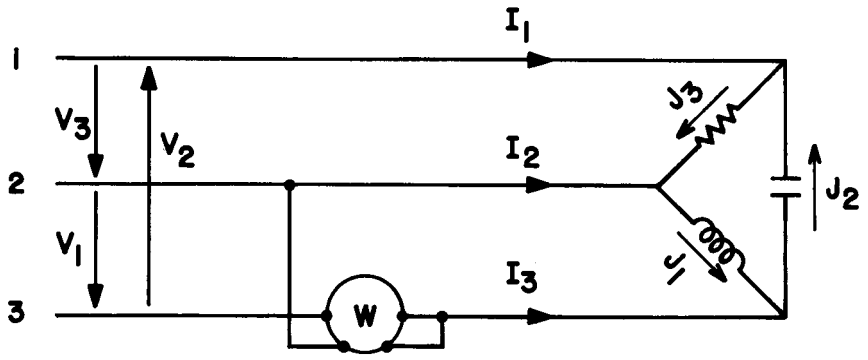
$$\overline{I}_3 = 22 \angle 150^o - 22 \angle 0^o = -19.05 + j11 - 22 = 42.5 \angle 165^o$$

Por consiguiente, las lecturas de los tres amperímetros son:

$$A_1 = 22\ A \qquad A_2 = 42.5\ A \qquad A_3 = 42.5\ A$$

PROBLEMA Nº 25

Tres elementos puros R, L y C se conectan a una línea trifásica de tensión compuesta 220 V, formando el triángulo que se muestra en la figura. Sabiendo que $X_L = X_C = 22\,\Omega$, calcular la lectura del vatímetro conectado según el esquema.




Solución

La lectura del vatímetro W es:

$$W = V_1 \cdot I_3 \cdot \cos(V_1, I_3)$$

expresión en la que se desconoce el valor de la intensidad $I_3$ y el ángulo formado por $V_1$ e $I_3$.

En el triángulo se verifica:

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1 \qquad (1)$$

siendo:

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{X}_L}$$

$$\bar{J}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{X}_C}$$

Las expresiones complejas de las tensiones de línea $V_1$ y $V_2$, en el sistema directo son:

$$\bar{V}_1 = 220 \angle 0^o$$

$$\bar{V}_2 = 220 \angle 240^o$$

y los valores complejos de las impedancias $X_L$ y $X_C$ valen:

$$\bar{X}_L = 22 \angle 90^o$$

$$\bar{X}_C = 22 \angle -90^o$$

Por lo tanto:

$$\bar{J}_1 = \frac{220 \angle 0^o}{22 \angle 90^o} = 10 \angle -90^o$$

$$\bar{J}_2 = \frac{220 \angle 240^o}{22 \angle -90^o} = 10 \angle 330^o$$

En consecuencia, por la expresión (1), el valor de la intensidad $I_3$ es:

$$\bar{I}_3 = 10 \angle 330^o - 10 \angle -90^o = 8.66 - j5 + j10 = 8.66 + j5 = 10 \angle 30^o$$

y la lectura del vatímetro W es:

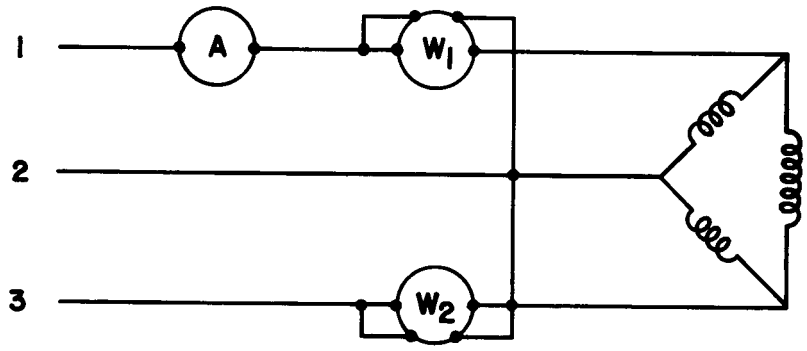
$$W = V_1 \cdot I_3 \cdot \cos(V_1, I_3) = 220 \cdot 10 \cdot \cos 30^o = 1905.26\ W$$

$$W = 1905.26\ W$$

PROBLEMA Nº 26

Tres receptores idénticos, con resistencia y autoinducción, se conectan en triángulo a una red trifásica de 200 V entre fases y frecuencia 50 Hz. Sabiendo que la lectura del amperímetro A es de 105 A, y las de los vatímetros $W_1$ y $W_2$, 21000 y 10500 W, respectivamente, calcular:

a) factor de potencia de los receptores.
b) resistencia y coeficiente de autoinducción de los receptores.
c) indicaciones del amperímetro y vatímetros si los tres receptores se conectaran en estrella.




Solución

a) La potencia total que absorbe el receptor trifásico es igual a la suma de las lecturas de los dos vatímetros, ya que éstos se encuentran conectados según el método de los dos vatímetros, por lo tanto:

$$P = W_1 + W_2 = 21000 + 10500 = 31500\ W$$

Por otra parte, la expresión que determina la potencia absorbida por un receptor trifásico equilibrado es:

$$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi$$

Despejando cos y particularizando para los datos del problema:

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{3}\cdot V\cdot I} = \frac{31500}{\sqrt{3}\cdot 200\cdot 105} = 0.866$$

Por lo tanto, el factor de potencia de los receptores vale:

$$\cos\varphi = 0.866$$

b) El valor de la resistencia y reactancia de cada receptor es:

$$R = Z\cdot\cos\varphi$$

$$X = Z\cdot\operatorname{sen}\varphi$$

donde:

$$Z = \frac{V}{J} = \frac{V}{\frac{I}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\cdot V}{I} = \frac{\sqrt{3}\cdot 200}{105} = 3.3\,\Omega$$

$$\cos\varphi = 0.866 \qquad \varphi = 30^{o}$$

Luego:

$$R = 3.3\cdot\cos 30^{o} = 2.86\,\Omega$$

$$R = 2.86\,\Omega$$

$$X = 3.3\cdot\operatorname{sen} 30^{o} = 1.65\,\Omega$$

y el coeficiente de autoinducción vale:

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{1.65}{2\cdot\pi\cdot 50} = 5.25\cdot 10^{-3}\,H$$

$$L = 5.25\cdot 10^{-3}\,H$$

c) Si el receptor se conectara en estrella absorbería la tercera parte de la intensidad que absorbe estando conectado en triángulo, es decir:

$$I' = \frac{I}{3} = \frac{105}{3} = 35\,A$$

Entonces la lectura del amperímetro A sería:

$$A = 35\,A$$

En cuanto a las lecturas de los dos vatímetros, sus indicaciones serían:

$$W_1 = V_3\cdot I_1'\cdot\cos(V_3, I_1')$$

$$W_2 = V_1 \cdot I_3' \cdot \cos(-V_1, I_3')$$

expresiones que por tratarse de un receptor equilibrado se simplifican en:

$$W_1 = V \cdot I' \cdot \cos(30^o + \varphi)$$

$$W_2 = V \cdot I' \cdot \cos(30^o - \varphi)$$

Por lo tanto:

$$W_1 = 200 \cdot 35 \cdot \cos(30^o + 30^o) = 3500\ W$$

$$W_2 = 200 \cdot 35 \cdot \cos(30^o - 30^o) = 7000\ W$$

$$W_1 = 3500\ W \qquad W_2 = 7000\ W$$

La suma de ambas lecturas es 10500 W, es decir, tal como cabía esperar, la tercera parte de la que absorbe el receptor cuando está conectado en triángulo.

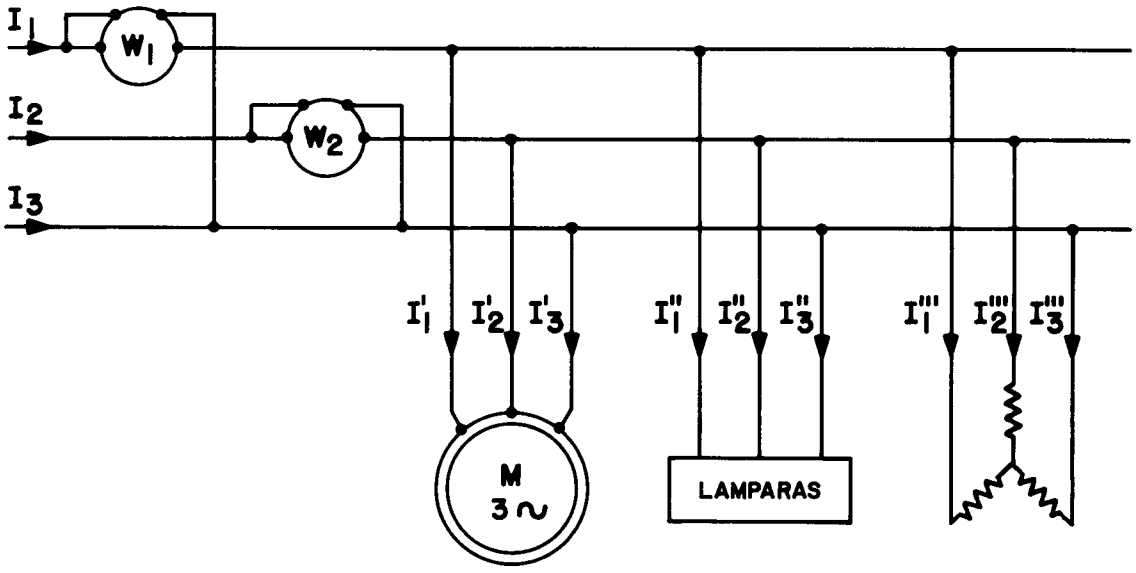
PROBLEMA Nº 27

Una instalación se alimenta con una red trifásica de tensión de línea 220 V y frecuencia 50 Hz. La instalación consta de los siguientes receptores:

- un motor de 40 CV, rendimiento del 80 % y factor de potencia 0.82.
- tres lámparas de 500 W cada una, montadas entre fase y neutro.
- un motor trifásico compuesto de tres bobinas, con una resistencia de 10 Ω y un coeficiente de autoinducción de 0.02 H cada una, conectadas en estrella.

Se pide:

a) corriente absorbida por la instalación.
b) factor de potencia del conjunto receptor.
c) lecturas de dos vatímetros instalados según el método de los dos vatímetros, con sus bobinas amperimétricas intercaladas en las fases 1 y 2.



## Solución

a) El valor de la corriente que circula por cada conductor de la línea es:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_1' + \bar{I}_1'' + \bar{I}_1''' \quad (1)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_2' + \bar{I}_2'' + \bar{I}_2''' \quad (2)$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_3' + \bar{I}_3'' + \bar{I}_3''' \quad (3)$$

Por ser los tres receptores conectados a la línea equilibrados, se verifica:

$$I_1' = I_2' = I_3' = I'$$

$$I_1'' = I_2'' = I_3'' = I''$$

$$I_1''' = I_2''' = I_3''' = I'''$$

y por lo tanto:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

El valor eficaz de cada una de las intensidades es:

$$I' = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V \cdot \cos\varphi} = \frac{40 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.82 \cdot 0.8} = 117.77 \text{ A}$$

$$I'' = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V} = \frac{3 \cdot 500}{\sqrt{3} \cdot 220} = 3.94 \text{ A}$$

Para el cálculo del valor eficaz de I’’’, hay que determinar en primer lugar el valor de la impedancia equivalente de cada bobina:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2} = \sqrt{10^2 + (0.02 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50)^2} = 11.81 \Omega$$

$$I''' = \frac{U}{Z} = \frac{V}{\sqrt{3} \cdot Z} = \frac{220}{\sqrt{3} \cdot 11.81} = 10.75 \text{ A}$$

Por conocer los factores de potencia de cada uno de los tres receptores trifásicos, es posible averiguar los desfases de las intensidades que toman de la línea con respecto a las tensiones simples. Así, para el primer receptor:

$$\varphi' = \arccos 0.82 = 34.92^o$$

El segundo receptor, por tratarse de lámparas y no indicar nada en el enunciado, se supone que se trata de resistencias puras y por consiguiente:

$$\varphi'' = 0^{o}$$

En cuanto al tercer receptor:

$$\varphi''' = \text{arc tang}\frac{X}{R} = \frac{0.02 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}{10} = 32.14^{o}$$

Así, las expresiones de las intensidades en forma compleja son:

$$\bar{I}_1' = 117.77 \left| \underline{55.08^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_2' = 117.77 \left| \underline{295.08^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_3' = 117.77 \left| \underline{175.08^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_1'' = 3.94 \left| \underline{90^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_2'' = 3.94 \left| \underline{330^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_3'' = 3.94 \left| \underline{210^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_1''' = 10.75 \left| \underline{57.86^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_2''' = 10.75 \left| \underline{297.86^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_3''' = 10.75 \left| \underline{177.86^{o}} \right.$$

Y el valor de la corriente en cada uno de los hilos de la línea, por las ecuaciones (1), (2) y (3), es:

$$\bar{I}_1 = 117.77 \left| \underline{55.08^{o}} + 3.94 \right| \underline{90^{o}} + 10.75 \left| \underline{57.86^{o}} = 67.42 + j\,96.57 + j\,3.94 + 5.72 + j\,9.1 \right.$$

$$\bar{I}_1 = 73.14 + j\,109.61 = 131.77 \left| \underline{56.29^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_2 = 117.77 \left| \underline{295.08^{o}} + 3.94 \right| \underline{330^{o}} + 10.75 \left| \underline{297.86^{o}} = 49.92 - j\,106.67 + 3.41 - j\,1.97 + 5.02 - j\,9. \right.$$

$$\bar{I}_2 = 58.35 - j\,118.14 = 131.77 \left| \underline{296.29^{o}} \right.$$

$$\bar{I}_3 = 117.77 \angle 175.08^o + 3.94 \angle 210^o + 10.75 \angle 177.86^o = -117.34 + j10.1 - 3.41 - j1.97 - 10.74 + j0.4$$

$$\bar{I}_3 = -131.49 + j8.53 = 131.77 \angle 176.29^o$$

Por lo tanto, la corriente absorbida por la instalación vale:

$$I = 131.77 \text{ A}$$

b) El factor de potencia de la instalación es el coseno del siguiente ángulo:

$$\varphi = 90^o - 56.29^o = 33.71^o \qquad \Rightarrow \qquad \cos\varphi = 0.83$$

c) Las lecturas de los dos vatímetros conectados según el método de los dos vatímetros, con sus bobinas amperimétricas intercaladas en las fases 1 y 2 son:

$$W_1 = V_2 \cdot I_1 \cdot \cos(-V_2, I_1)$$

$$W_2 = V_1 \cdot I_2 \cdot \cos(V_1, I_2)$$

Por tratarse de un conjunto de receptores equilibrados, el receptor equivalente también lo es, en consecuencia las lecturas anteriores se simplifican:

$$W_1 = V \cdot I \cdot \cos(30^o - \varphi)$$

$$W_2 = V \cdot I \cdot \cos(30^o + \varphi)$$

Por lo tanto:

$$W_1 = 220 \cdot 131.77 \cdot \cos(30^o - 33.71^o) = 28928.65 \text{ W}$$

$$W_2 = 220 \cdot 131.77 \cdot \cos(30^o + 33.71^o) = 12839.83 \text{ W}$$

$$W_1 = 28928.65 \text{ W} \qquad W_2 = 12839.83 \text{ W}$$

PROBLEMA Nº 28

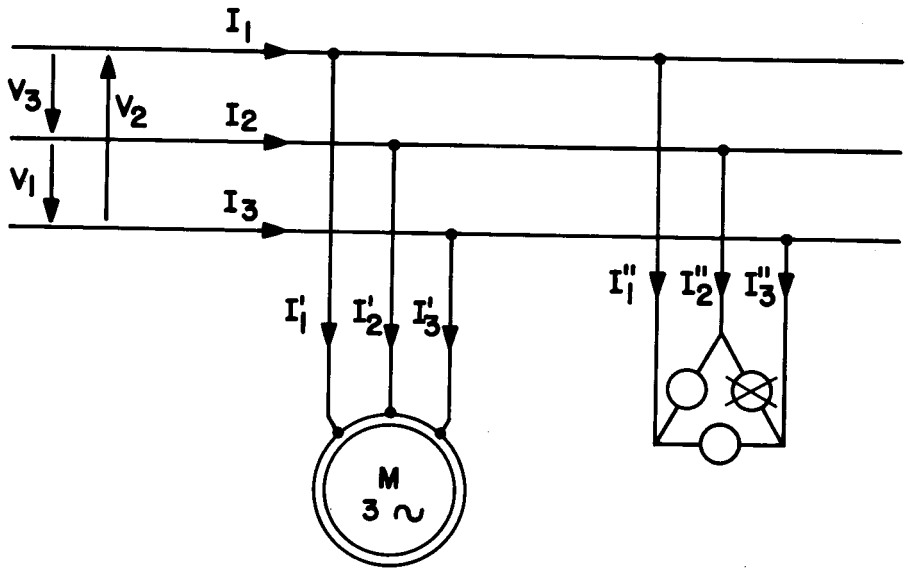
A una línea trifásica equilibrada de tensión compuesta 220 V, frecuencia 50 Hz y orden de sucesión de fases 1, 2 y 3, se conectan:

- un motor trifásico de potencia útil 5 CV, factor de potencia 0.8 y rendimiento 90%.
- tres lámparas de incandescencia de 100 W cada una de ellas, conectadas en triángulo.

Calcular las intensidades compuestas cuando, estando funcionando simultáneamente los dos receptores, una de las tres lámparas se funde.

Solución

El esquema eléctrico correspondiente a la instalación es el siguiente:




Supongamos que la lámpara que se funde es, por ejemplo, la que aparece con una cruz en el esquema.

Las relaciones que ligan las intensidades compuestas o de línea con las que toman los receptores son:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_1' + \bar{I}_1'' \quad (1)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_2' + \bar{I}_2'' \quad (2)$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_3' + \bar{I}_3'' \quad (3)$$

Por ser el primer receptor un motor trifásico se verifica:

$$I_1' = I_2' = I_3' = I'$$

El valor eficaz de I' se deduce de la siguiente expresión:

$$I' = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V \cdot \cos\varphi} = \frac{5 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.8 \cdot 09} = 13.41\,A$$

Y el ángulo de desfase:

$$\varphi = \arccos 0.8 = 36.87^\circ$$

Por lo tanto, las expresiones complejas de las intensidades que toma el motor de los hilos de la línea son:

$$\bar{I}_1' = 13.41 \angle 90^\circ - 36.87^\circ = 13.41 \angle 53.13^\circ$$

$$\bar{I}_2' = 13.41 \angle -66.87^\circ$$

$$\bar{I}_3' = 13.41 \angle 173.13^\circ$$

Por otro lado, antes de romperse la lámpara se verifica:

$$I_1'' = I_2'' = I_3'' = I''$$

El valor eficaz de I'' es:

$$I'' = \sqrt{3} \cdot J''$$

siendo:

$$J'' = \frac{P}{V \cdot \cos\varphi} = \frac{100}{220 \cdot 1} = 0.45\ A$$

ya que por tratarse de lámparas de incandescencia su factor de potencia es igual a la unidad.

Las expresiones que relacionan las intensidades de línea con las que circulan por las lámparas son:

$$\bar{I}_1'' = \bar{J}_3'' - \bar{J}_2''$$

$$\bar{I}_2'' = \bar{J}_1'' - \bar{J}_3''$$

$$\bar{I}_3'' = \bar{J}_2'' - \bar{J}_1''$$

Al fundirse la lámpara que aparece con una cruz en el esquema significa que $J_1'' = 0$, y, en consecuencia, las expresiones anteriores quedan:

$$\bar{I}_1'' = \bar{J}_3'' - \bar{J}_2''$$

$$\bar{I}_2'' = -\bar{J}_3''$$

$$\bar{I}_3'' = \bar{J}_2''$$

Las expresiones complejas de las intensidades que circulan por las lámparas son:

$$\bar{J}_1'' = 0.45 \left| \underline{0^\circ} \right.$$

$$\bar{J}_2'' = 0.45 \left| \underline{-120^\circ} \right.$$

$$\bar{J}_3'' = 0.45 \left| \underline{120^\circ} \right.$$

Sustituyendo valores:

$$\bar{I}_1'' = 0.78 \left| \underline{90^\circ} \right.$$

$$\bar{I}_2'' = 0.45 \left| \underline{-60^\circ} \right.$$

$$\bar{I}_3'' = 0.45 \left| \underline{-120^\circ} \right.$$

Finalmente, por las ecuaciones (1), (2) y (3), las intensidades compuestas cuando, estando funcionando simultáneamente los dos receptores, una de las tres lámparas se funde, valen:

$$\bar{I}_1 = 13.41 \left| \underline{53.13^\circ} + 0.78 \right| \underline{90^\circ} = 8.04 + j10.72 + j0.78 = 8.04 + j11.51 = 14.05 \left| \underline{55.06^\circ} \right.$$

$$\bar{I}_2 = 13.41 \left| \underline{-66.87^\circ} + 0.45 \right| \underline{-60^\circ} = 5.26 - j12.33 + 0.22 - j0.39 = 5.48 - j12.72 = 14.86 \left| \underline{-66.66^\circ} \right.$$

$$\bar{I}_3 = 13.41 \left| \underline{173.13^\circ} + 0.45 \right| \underline{-120^\circ} = -13.31 + j1.60 - 0.22 - j0.39 = -13.53 + j1.21 = 13.59 \left| \underline{174.89} \right.$$

$$\bar{I}_1 = 14.05 \left| \underline{55.06^\circ} \right. \qquad \bar{I}_2 = 14.86 \left| \underline{-66.66^\circ} \right. \qquad \bar{I}_3 = 13.59 \left| \underline{174.89^\circ} \right.$$

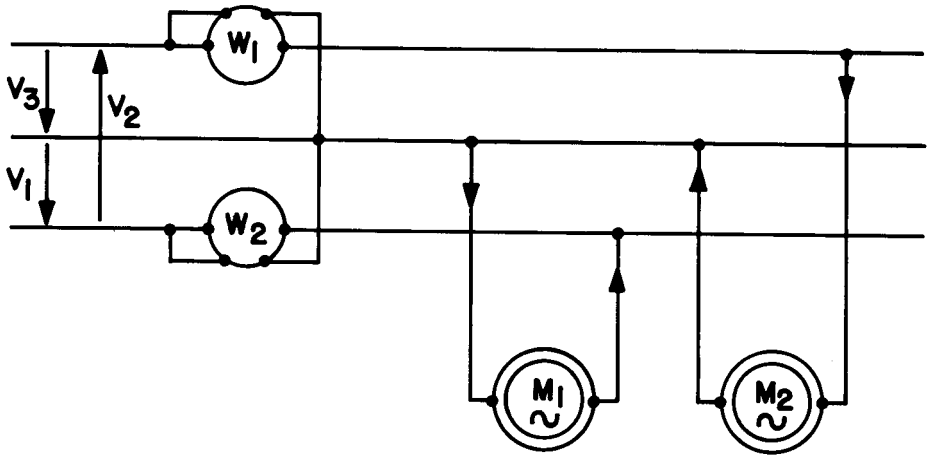
PROBLEMA Nº 29

La línea trifásica de la figura, cuya tensión de línea es de 100 V, alimenta a dos motores monofásicos conectados como se indica en la figura, de las siguientes características:

- motor M1: potencia útil 5 CV, rendimiento 90 % y factor de potencia 0.866.
- motor M2: potencia útil 10 CV, rendimiento 95 % y factor de potencia 0.866.

Se desea conocer:

a) intensidad que circula por cada hilo de la línea.
b) lectura de dos vatímetros monofásicos conectados según se indica en la figura. Comprobar que la suma de sus indicaciones coincide con la potencia que toma de la línea el conjunto de los dos motores monofásicos.




Solución

a) Al estar los motores monofásicos unidos a la red trifásica, la intensidad que toman de la fase de mayor potencial la devuelven a la de menor potencial. Para establecer las ecuaciones que determinan las intensidades de línea se aplica Kirchhoff al circuito, resultando:

$$\overline{I_1} = \overline{I_{M2}} \qquad (1)$$

$$\overline{I_2} = \overline{I_{M1}} - \overline{I_{M2}} \qquad (2)$$

$$\overline{I_3} = -\overline{I_{M1}} \qquad (3)$$

Los valores eficaces de las intensidades que toman de la línea los dos motores son:

$$I_{M1} = \frac{P}{V \cdot \cos\varphi} = \frac{5 \cdot 736}{100 \cdot 0.866 \cdot 0.9} = 47.22 \text{ A}$$

$$I_{M2} = \frac{P}{V \cdot \cos\varphi} = \frac{10 \cdot 736}{100 \cdot 0.866 \cdot 0.95} = 89.46 \text{ A}$$

Para expresar en forma compleja estas dos intensidades hay que tener en cuenta que están desfasadas con respecto a la tensión de línea a la que se encuentran conectados los motores, es decir, la $I_{M1}$ está desfasada respecto a $V_1$ y la $I_{M2}$ respecto a $V_3$.

Las expresiones complejas de las tensiones de línea son:

$$\overline{V_1} = 100 \left| \underline{0^o} \right. \qquad \overline{V_2} = 100 \left| \underline{240^o} \right. \qquad \overline{V_3} = 100 \left| \underline{120^o} \right.$$

y por lo tanto:

$$\overline{I_{M1}} = 47.22 \left| \underline{-30^o} \right. \qquad \overline{I_{M2}} = 89.46 \left| \underline{90^o} \right.$$

ya que para ambos motores:

$$\cos\varphi = 0.866 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 30^o$$

Luego por las ecuaciones (1), (2) y (3), las intensidades que circulan por cada hilo de la línea trifásica valen:

$$\overline{I_1} = 89.46 \left| \underline{90^o} \right.$$

$$\overline{I_2} = 47.22 \left| \underline{-30^o} \right. - 89.46 \left| \underline{90^o} \right. = 40.89 - j\,23.61 - j\,89.46 = 40.89 - j\,113.07 = 120.23 \left| \underline{-70.12^o} \right.$$

$$\overline{I_3} = 47.22 \left| \underline{150^o} \right.$$

$$\overline{I_1} = 89.46 \left| \underline{90^o} \right. \qquad \overline{I_2} = 120.23 \left| \underline{-70.12^o} \right. \qquad \overline{I_3} = 47.22 \left| \underline{150^o} \right.$$

b) Las lecturas de los dos vatímetros, que están conectados siguiendo el método de los dos vatímetros, son:

$$W_1 = V_3 \cdot I_1 \cdot \cos(V_3, I_1)$$

$$W_2 = V_1 \cdot I_3 \cdot \cos(-V_1, I_3)$$

Sustituyendo valores:

$$W_1 = 100 \cdot 89.46 \cdot \cos(120^o - 90^o) = 7747.46\ W$$

$$W_2 = 100 \cdot 47.22 \cdot \cos(180^o - 150^o) = 4089.37\ W$$

$$W_1 = 7747.46\ W \qquad W_2 = 4089.37\ W$$

La suma de las lecturas de los dos vatímetros es:

$$W = W_1 + W_2 = 7747.46 + 4089.37 = 11836.83\ W$$

Por otra parte, la potencia absorbida por los motores es:

$$P_{M1} = \frac{5 \cdot 736}{0.9} = 4088.88\ W$$

$$P_{M2} = \frac{10 \cdot 736}{0.95} = 7747.37\ W$$

cuya suma vale:

$$P = P_{M1} + P_{M2} = 4088.88 + 7747.37 = 11836.25\ W$$

Puede observarse que este valor es coincidente con el obtenido mediante la suma de las lecturas de los dos vatímetros.

PROBLEMA Nº 30

Sea un receptor trifásico parcialmente inductivo, con factor de potencia cos $\varphi$, conectado a una línea trifásica con tensión de línea V y pulsación $\omega$.

Se pide:

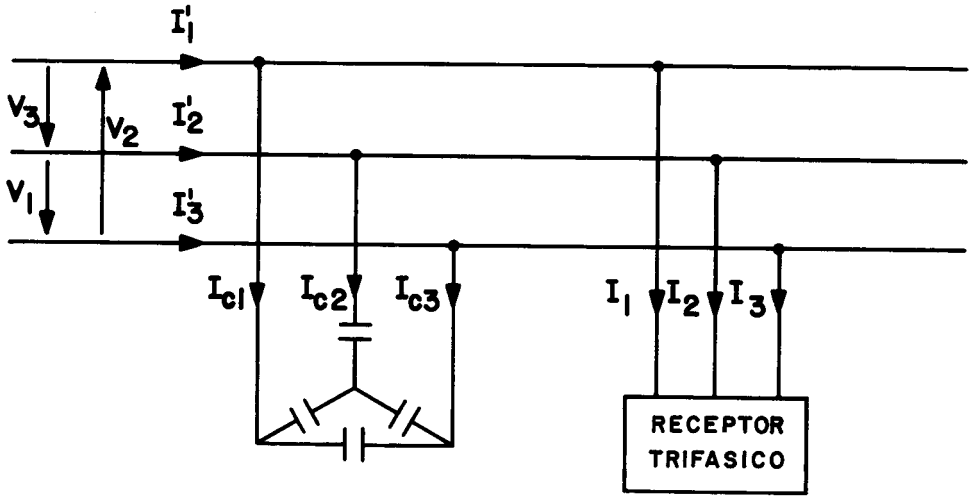
a) equipo de condensadores, conectados en estrella, necesario para elevar el factor de potencia de la instalación a cos $\varphi$'.
b) equipo de condensadores, conectados en triángulo, necesario para elevar el factor de potencia de la instalación a cos $\varphi$'.
c) ¿cuál de las dos conexiones es más conveniente?.

Solución

La intensidad I que absorbe el receptor trifásico parcialmente inductivo, está retrasada un ángulo $\varphi$ respecto a la tensión simple U.

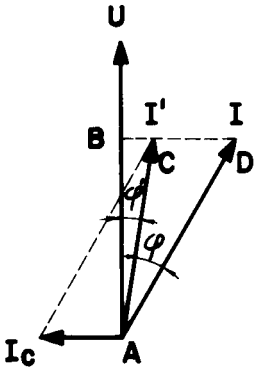
Una vez conectado el equipo de condensadores la instalación queda como se muestra en la siguiente figura, verificándose:

$$\bar{I}_1' = \overline{I_{C1}} + \bar{I}_1$$
$$\bar{I}_2' = \overline{I_{C2}} + \bar{I}_2$$
$$\bar{I}_3' = \overline{I_{C3}} + \bar{I}_3$$



En este caso $I_1$', $I_2$' e $I_3$' están desfasadas un ángulo $\varphi$' respecto a las tensiones simples $U_1$, $U_2$ y $U_3$, respectivamente.

Tomando una cualquiera de las tensiones simples, las intensidades I', $I_c$ e I irán representadas de la siguiente forma:




En la figura:

$$I_C = CD = BD - BC \qquad (1)$$

$$BD = AB \cdot \text{tang}\varphi$$

$$BC = AB \cdot \text{tang}\varphi'$$

Por otra parte:

$$AB = AD \cdot \cos\varphi = I \cdot \cos\varphi$$

luego:

$$BD = I \cdot \cos\varphi \cdot \text{tang}\varphi$$

$$BC = I \cdot \cos\varphi \cdot \text{tang}\varphi'$$

Por la expresión (1), la intensidad que tiene que absorber el equipo de condensadores es:

$$I_C = I \cdot \cos\varphi \cdot (\text{tang}\varphi - \text{tang}\varphi')$$

a) Si el equipo de condensadores está conectado en estrella:

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{\frac{V}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\omega \cdot C}} = \frac{V \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}{\sqrt{3}}$$

$$C = \frac{\sqrt{3} \cdot I_C}{V \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\sqrt{3} \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot (\text{tang}\varphi - \text{tang}\varphi')}{V \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

siendo C la capacidad de cada condensador.

Desde el punto de vista práctico, los condensadores se dan por su potencia reactiva, expresada en kVAr, es decir:

$$Q_C = I_C \cdot U$$

$$Q_C = \frac{V \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot (\text{tang}\varphi - \text{tang}\varphi')}{1000 \cdot \sqrt{3}} = \frac{P \cdot (\text{tang}\varphi - \text{tang}\varphi')}{1000 \cdot \sqrt{3}}$$

donde P es la potencia activa absorbida por el receptor.

b) Si los condensadores están conectados en triángulo, la intensidad que debe tomar de la línea el equipo de condensadores debe ser también $I_c$. Ahora bien, en este caso por cada condensador circula una intensidad de valor eficaz $J_c$:

$$J_C = \frac{V}{X_C'} = \frac{V}{\frac{1}{\omega \cdot C'}} = V \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C'$$

$$C' = \frac{J_C}{V \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{\frac{I_C}{\sqrt{3}}}{V \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{I \cdot \cos\varphi \cdot (\text{tang}\varphi - \text{tang}\varphi')}{\sqrt{3} \cdot V \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{C}{3}$$

es decir, que la capacidad de cada condensador C’ debe ser la tercera parte de la que se requiere cuando el equipo se conecta en estrella.

En cuanto a la potencia reactiva de cada condensador:

$$Q_C' = J_C \cdot V$$

$$Q_C' = \frac{I_C}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot U = I_C \cdot U = Q_C$$

valor que coincide con el caso anterior.

c) A la vista de los resultados anteriores la conexión más conveniente es en triángulo, ya que conservando la potencia reactiva, la capacidad que se requiere es tres veces menor que en estrella.