PROBLEMA Nº 41

Una línea trifásica de 220 V de tensión compuesta alimenta tres receptores:

A) equipo de condensadores conectados en triángulo, con una capacidad cada uno de C = 1/3140 F.

B) motor trifásico que absorbe 19 A, con un factor de potencia de $\sqrt{3}/2$.

C) receptor monofásico conectado entre las fases 1 y 2, que absorbe 2090 W, con un factor de potencia de 0.5.

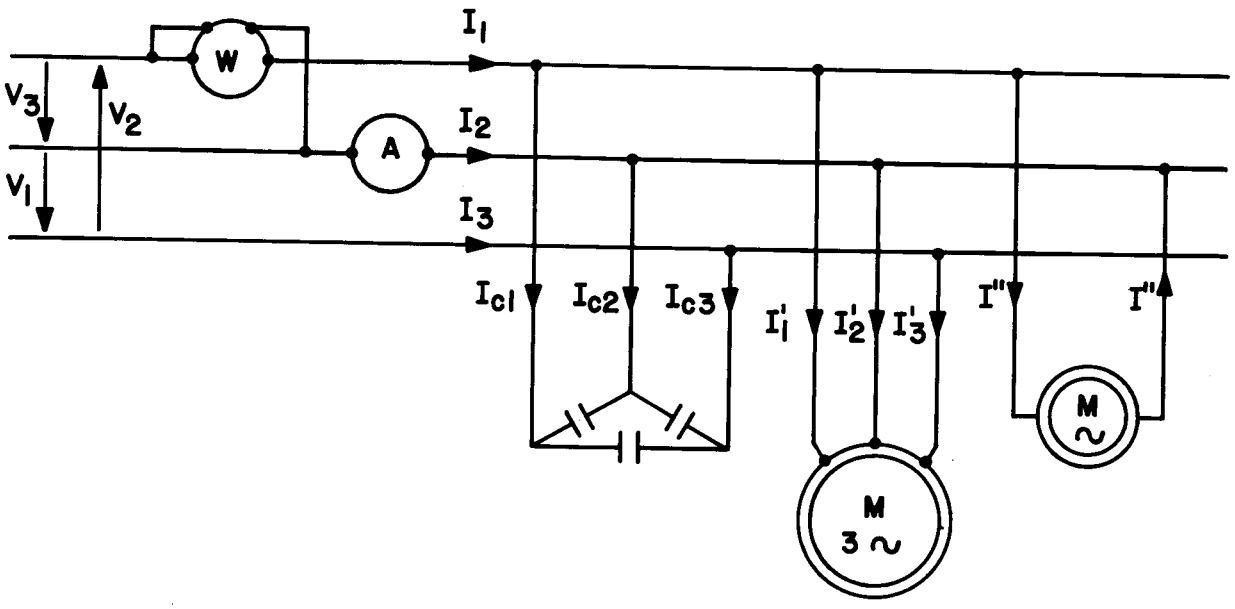
Si la frecuencia de la red es de 50 Hz, calcular:

a) lectura de un vatímetro monofásico conectado con su bobina amperimétrica en la fase 1 y con la voltimétrica entre la 1 y la 2.

b) lectura de un amperímetro conectado en la fase 2.

Solución

El receptor equivalente al conjunto de receptores de esta instalación es no equilibrado. El esquema correspondiente se muestra a continuación.



a) La lectura del vatímetro es:

$$W = V_3 \cdot I_1 \cdot \cos(V_3, I_1) \qquad (1)$$

expresión en la que se desconoce el valor de la intensidad I_1 y el ángulo formado por V_3 e I_1.

Tomando V_1 como origen de fases, las expresiones complejas de las tensiones compuestas son:

$$\overline{V}_1 = 220 \angle 0^o \qquad \overline{V}_2 = 220 \angle 240^o \qquad \overline{V}_3 = 220 \angle 120^o$$

y las de las tensiones simples:

$$\overline{U}_1 = 127 \angle 90^o \qquad \overline{U}_2 = 127 \angle 330^o \qquad \overline{U}_3 = 127 \angle 210^o$$

La intensidad que circula por el hilo 1 es:

$$\overline{I}_1 = \overline{I_{C1}} + \overline{I}_1' + \overline{I}'' \qquad (2)$$

El valor eficaz de la intensidad absorbida de la línea por los condensadores es:

$$I_{C1} = I_{C2} = I_{C3} = I_C = \sqrt{3} \cdot J_C = \sqrt{3} \cdot \frac{V}{X_C} = \sqrt{3} \cdot \frac{V}{\frac{1}{\omega \cdot C}} = \sqrt{3} \cdot V \cdot \omega \cdot C$$

$$I_C = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \frac{1}{3140} = 38.12 \text{ A}$$

siendo sus expresiones complejas las siguientes:

$$\overline{I_{C1}} = 38.12 \angle 180^o \qquad \overline{I_{C2}} = 38.12 \angle 60^o \qquad \overline{I_{C3}} = 38.12 \angle 300^o$$

Por otra parte, las expresiones complejas de las intensidades que toma el motor de la línea son:

$$\overline{I}_1' = 19 \angle 90^o - \varphi' = 19 \angle 90^o - 30^o = 19 \angle 60^o \qquad \overline{I}_2' = 19 \angle 300^o \qquad \overline{I}_3' = 19 \angle 180^o$$

Finalmente, el valor eficaz de la intensidad que toma el receptor monofásico es:

$$I'' = \frac{2090}{220 \cdot 0.5} = 19.03 \text{ A}$$

El desfase de I'' con respecto a la intensidad V_3 a que está conectado el receptor vale:

$$\varphi'' = \arccos 0.5 = 60^o$$

Por lo tanto, su expresión compleja es:

$$\bar{I}'' = 19.03 \left| \underline{120^o - \varphi''} \right. = 19.03 \left| \underline{60^o} \right.$$

Una vez calculadas las intensidades absorbidas de la línea por cada receptor, se puede obtener, mediante la expresión (2), la intensidad que circula por el hilo 1:

$$\bar{I}_1 = 38.12 \left| \underline{180^o} \right. + 19 \left| \underline{60^o} \right. + 19.03 \left| \underline{60^o} \right.$$

$$\bar{I}_1 = -38.12 + 9.5 + j16.45 + 9.52 + j16.48 = -19.1 + j32.93 = 38.07 \left| \underline{120.11^o} \right.$$

En cuanto al ángulo que forma I_1 con V_3 vale:

$$120.11^o - 120^o = 0.11^o$$

Por lo tanto, la lectura del vatímetro, por la expresión (1), es:

$$W = 220 \cdot 38.07 \cdot \cos 0.11^o = 8375.38\ W$$

$$W = 8375.38\ W$$

b) La lectura del amperímetro conectado en la segunda fase es igual al valor eficaz de la intensidad que circula por dicha fase, es decir, I_2, cuya expresión compleja es:

$$\bar{I}_2 = \overline{I_{C2}} + \bar{I}_2' - \bar{I}''$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior:

$$\bar{I}_2 = 38.12 \left| \underline{60^o} \right. + 19 \left| \underline{300^o} \right. - 19.03 \left| \underline{60^o} \right.$$

$$\bar{I}_2 = 19.06 + j33.01 + 9.5 - j16.45 - 9.51 - j16.48 = 19.05 + j0.08 = 19.05 \left| \underline{0.24^o} \right.$$

La lectura del amperímetro será, en consecuencia:

$$I_2 = 19.05\ A$$

PROBLEMA Nº 42

A una línea trifásica con tensión de línea de 220 V, se conectan los siguientes receptores:

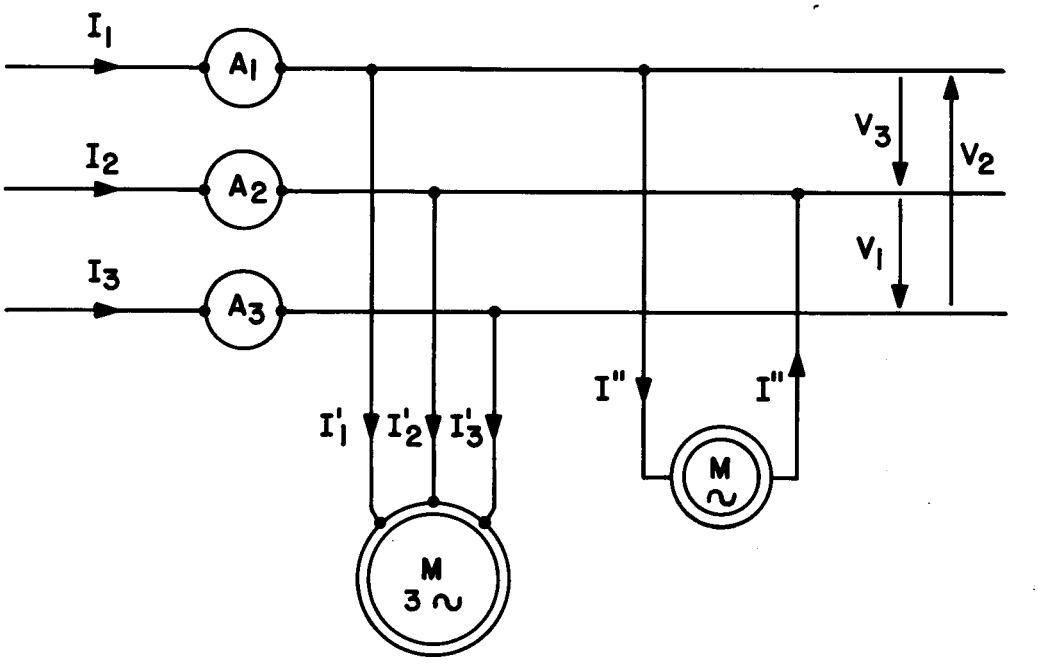
A) motor trifásico de las siguientes características:
   - potencia útil: 5 CV.
   - rendimiento: 90 %.
   - factor de potencia: 0.8.

B) motor monofásico conectado entre las fases 1 y 2, que toma una intensidad de 10 A, con un factor de potencia de 0.8.

Calcular la intensidad que marcarían tres amperímetros conectados a cada una de las fases antes de los dos receptores.

Solución

El receptor equivalente al conjunto de los dos receptores de esta instalación es no equilibrado. El esquema eléctrico correspondiente se muestra a continuación.



Las lecturas de los tres amperímetros son los valores eficaces de las intensidades compuestas o de línea, que valen:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_1' + \bar{I}'' \\ \bar{I}_2 &= \bar{I}_2' - \bar{I}'' \\ \bar{I}_3 &= \bar{I}_3' \end{aligned} \qquad (1)$$

El valor eficaz de la intensidad que toma el motor trifásico es:

$$I' = \frac{5 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.8 \cdot 0.9} = 13.41\,A$$

y el desfase correspondiente a dicho motor:

$$\varphi' = \arccos 0.8 = 36.87^o$$

En consecuencia, tomando V_1 como origen de fases, las expresiones complejas de las intensidades que toma el motor trifásico son:

$$\bar{I}_1' = 13.41 \angle 90^o - \varphi' = 13.41 \angle 90^o - 36.87^o = 13.41 \angle 53.13^o$$

$$\bar{I}_2' = 13.41 \angle 293.13^o$$

$$\bar{I}_3' = 13.41 \angle 173.13^o$$

El valor eficaz de la intensidad que toma el motor monofásico es:

$$I'' = 10\ A$$

y el desfase correspondiente entre la tensión V_3 a que se encuentra conectado dicho motor y la intensidad que absorbe I'' es:

$$\varphi'' = \arccos 0.8 = 36.87^o$$

Por lo tanto, la expresión compleja de esta intensidad es:

$$\bar{I}'' = 10 \angle 120^o - \varphi'' = 10 \angle 120^o - 36.87^o = 10 \angle 83.13^o$$

Finalmente, de acuerdo al conjunto de ecuaciones (1), las expresiones complejas de las intensidades que suministra la línea al conjunto de receptores son:

$$\bar{I}_1 = 13.41 \angle 53.13^o + 10 \angle 83.13^o = 8.05 + j\,10.73 + 1.20 + j\,9.93 = 9.25 + j\,20.66 = 22.64 \angle 65.88^o$$

$$\bar{I}_2 = 13.41 \angle 293.13^o - 10 \angle 83.13^o = 5.27 - j\,12.33 - 1.20 - j\,9.93 = 4.07 - j\,22.26 = 22.63 \angle 280.36^o$$

$$\bar{I}_3 = 13.41 \angle 173.13^o$$

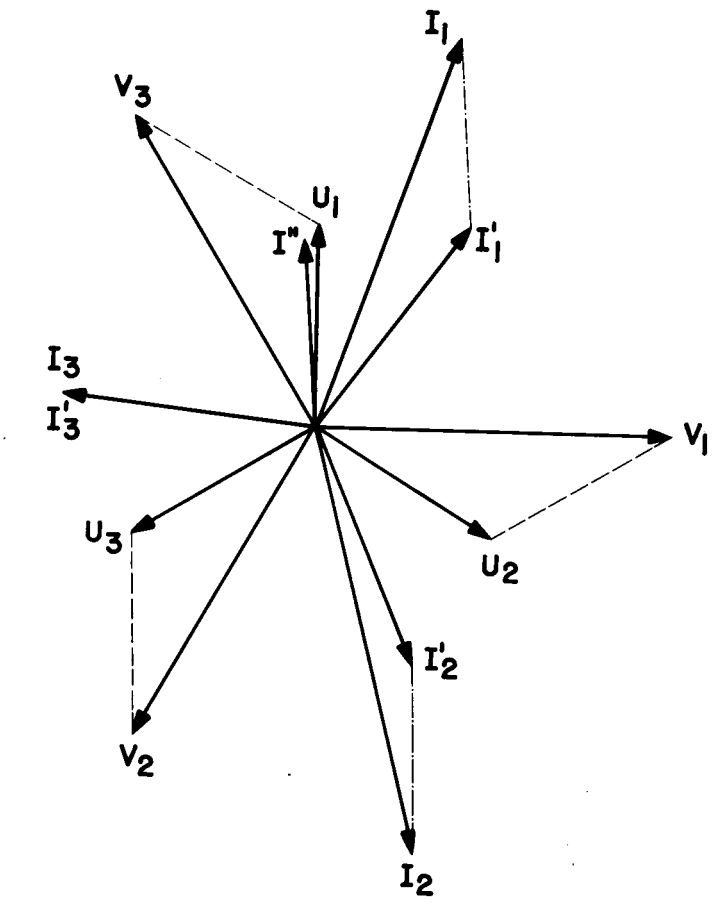
y, por lo tanto, las lecturas de los tres amperímetros son:

$$A_1 = 22.64\ A \qquad A_2 = 22.63\ A \qquad A_3 = 13.41\,A$$

Método gráfico

Como ya se ha explicado anteriormente, para resolver el ejercicio por el método gráfico, se representa a escala el diagrama vectorial de tensiones y sobre él se dibujan las intensidades que toman los dos receptores.

Teniendo en cuenta el conjunto de ecuaciones (1) se obtienen, por suma vectorial, las intensidades compuestas o de línea.



En el diagrama se ha tomado para la escala de intensidades:

$$1\,\text{cm} = 4\,\text{A}$$

obteniéndose:

$$I_1 = 5.5\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad I_1 = 5.5 \cdot 4 = 22.2\,\text{A}$$

$$I_2 = 5.7\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad I_2 = 5.7 \cdot 4 = 22.8\,\text{A}$$

$$I_3 = 13.41\,\text{A}$$

Valores que difieren poco de los calculados mediante el método complejo.

PROBLEMA Nº 43

Tres cargas de R = 25 Ω y L = 0.1 H se conectan a una línea trifásica de cuatro hilos, cada una entre fase y neutro. Si la tensión compuesta es de 415 V se desea conocer:

a) la intensidad de línea, la potencia absorbida y el factor de potencia.
b) la capacidad de cada uno de los condensadores de un equipo conectado en triángulo, para elevar el factor de potencia de la instalación a la unidad, así como la potencia reactiva correspondiente al equipo de condensadores.
c) se desconecta el equipo de condensadores y se conecta a la línea un sistema formado por tres resistencias de 41.5 Ω en triángulo. Se desea conocer la intensidad total que recorre los conductores de la línea.
d) lectura de un vatímetro monofásico conectado con su bobina amperimétrica en la fase R y la voltimétrica entre las fases R y N, cuando sólo están conectados los receptores correspondiente al apartado a).

Solución

a) Las tres cargas constituyen un receptor trifásico equilibrado conectado en estrella, por lo que las intensidades de línea coinciden con las simples y valen:

$$\bar{I}_1' = \bar{J}_1' = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1}$$
$$\bar{I}_2' = \bar{J}_2' = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} \qquad (1)$$
$$\bar{I}_3' = \bar{J}_3' = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3}$$

Tomando V_1 como origen de fases, las expresiones complejas de las tensiones simples son:

$$\bar{U}_1 = 239.6 \angle 90^o \qquad \bar{U}_2 = 239.6 \angle 330^o \qquad \bar{U}_3 = 239.6 \angle 210^o$$

La impedancia equivalente de cada carga vale:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{25^2 + (0.1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50)^2} = 40.15\ \Omega$$

$$\varphi = \text{arctang}\frac{X}{R} = \text{arctang}\frac{0.1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}{25} = \text{arctang}\,1.25 = 51.49^o$$

$$\overline{Z} = 40.15 \angle 51.49^{o}$$

Por lo tanto, según el conjunto de ecuaciones (1), las expresiones complejas de las intensidades de línea son:

$$\overline{I_1}' = \frac{239.6 \angle 90^{o}}{40.15 \angle 51.49^{o}} = 5.97 \angle 38.51^{o} \qquad \overline{I_2}' = 5.97 \angle 278.51^{o} \qquad \overline{I_3}' = 5.97 \angle 158.51^{o}$$

En cuanto a la potencia absorbida, vale:

$$P = \sqrt{3} \cdot 415 \cdot 5.97 \cdot \cos 51.49^{o} = 2671.95 \text{ W}$$

$$P = 2671.95 \text{ W}$$

Y el factor de potencia es:

$$\cos 51.49^{o} = 0.623$$

b) La intensidad que debe tomar de la línea el equipo de condensadores es:

$$I_C = 5.97 \cdot 0.623 \cdot (\text{tang} 51.49^{o} - \text{tang} 0^{o}) = 4.67 \text{ A}$$

Al estar los condensadores conectados en triángulo la intensidad que circula por cada uno de ellos vale:

$$J_C = \frac{I_C}{\sqrt{3}} = \frac{4.67}{\sqrt{3}} = 2.87 \text{ A}$$

Y, por lo tanto, la capacidad de cada condensador será:

$$C = \frac{J_C}{V \cdot \omega} = \frac{2.87}{415 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} = 2.068 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

$$C = 2.068 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

En cuanto a la potencia reactiva correspondiente al equipo de condensadores:

$$Q_C = \sqrt{3} \cdot V \cdot I_C = \sqrt{3} \cdot 415 \cdot 4.67 = 3356.8 \text{ VAr}$$

$$Q_C = 3356.8 \text{ VAr}$$

c) La intensidad que suministra la línea al conjunto de receptores formado por las tres cargas conectadas en triángulo y las tres resistencias conectadas igualmente en triángulo, es:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_1' + \bar{I}_1'' \\ \bar{I}_2 &= \bar{I}_2' + \bar{I}_2'' \\ \bar{I}_3 &= \bar{I}_3' + \bar{I}_3'' \end{aligned} \qquad (2)$$

El valor eficaz de la intensidad que toma de la línea el receptor formado por las tres resistencias vale:

$$I'' = \sqrt{3} \cdot J'' = \sqrt{3} \cdot \frac{V}{R} = \sqrt{3} \cdot \frac{415}{41.5} = 17.32 \text{ A}$$

y las expresiones complejas correspondientes son:

$$\bar{I}_1'' = 17.32 \angle 90^\circ \qquad \bar{I}_2'' = 17.32 \angle 330^\circ \qquad \bar{I}_3'' = 17.32 \angle 210^\circ$$

Por lo tanto, según el conjunto de ecuaciones (2), resulta:

$$\bar{I}_1 = 5.97 \angle 38.51^\circ + 17.32 \angle 90^\circ = 4.67 + j\,3.72 + j\,17.32 = 4.67 + j\,21.04 = 21.55 \angle 77.49^\circ$$

y por ser el receptor equivalente equilibrado:

$$\bar{I}_1 = 21.55 \angle 77.49^\circ \qquad \bar{I}_2 = 21.55 \angle 317.49^\circ \qquad \bar{I}_3 = 21.55 \angle 197.49^\circ$$

d) La lectura del vatímetro cuando sólo están conectadas las tres cargas será:

$$W = 239.6 \cdot 5.97 \cdot \cos 51.49^\circ = 890.65 \text{ W}$$

$$W = 890.65 \text{ W}$$

PROBLEMA Nº 44

Una línea trifásica de tensión compuesta 220 V alimenta los siguientes receptores:

A) motor trifásico de las siguientes características:
   - potencia útil: 4 CV.
   - factor de potencia: 0.82.
   - rendimiento: 80 %.

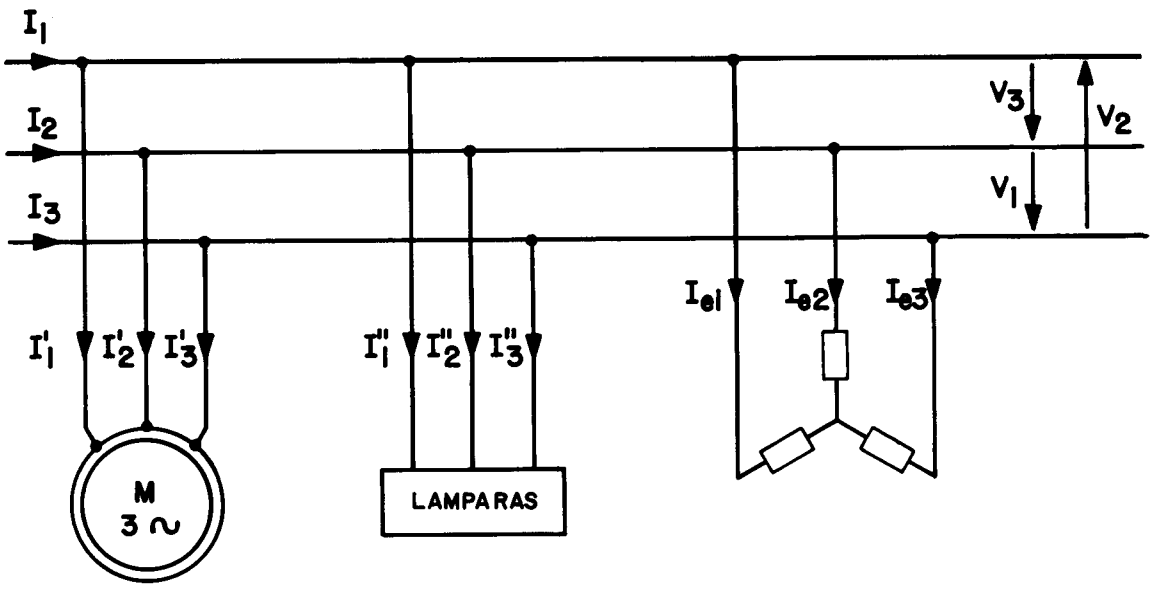
B) equipo de lámparas compuesto por tres lámparas de 500 W cada una.

C) receptor conectado en estrella, constituido por impedancias de resistencia 10 Ω y coeficiente de autoinducción 0.02 H.

Sabiendo que la frecuencia es de 50 Hz, calcular las intensidades que circulan por los tres hilos de la línea.

Solución

El esquema eléctrico correspondiente a esta instalación se muestra a continuación.



Las expresiones complejas de las intensidades compuestas o de línea son:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_1' + \bar{I}_1'' + \bar{I}_{e1} \qquad (1)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_2' + \bar{I}_2'' + \bar{I}_{e2}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_3' + \bar{I}_3'' + \bar{I}_{e3}$$

Por ser los tres receptores equilibrados se cumple:

$$I' = I_1' = I_2' = I_3'$$

$$I'' = I_1'' = I_2'' = I_3''$$

$$I_e = I_{e1} = I_{e2} = I_{e3}$$

y:

$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

Por lo tanto, calculando una cualquiera de las intensidades de línea es posible obtener las otras dos, que estarán desfasadas 120º en adelanto y 120º en retraso, respecto a la calculada.

Los valores eficaces de las intensidades que toman de la línea los tres receptores trifásicos valen:

$$I' = \frac{4 \cdot 736}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.82 \cdot 0.8} = 11.78 \text{ A}$$

$$I'' = \frac{3 \cdot 500}{\sqrt{3} \cdot 220} = 3.94 \text{ A}$$

$$I_e = \frac{U}{Z} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}}}{\sqrt{10^2 + (0.02 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50)^2}} = \frac{127}{11.81} = 10.75 \text{ A}$$

Y los desfases en los receptores entre las intensidades que absorben de la línea y las tensiones simples o estrelladas son:

$$\varphi' = \arccos 0.82 = 34.92^o$$

$$\varphi'' = \arccos 1 = 0^o \text{ (se consideran resistencias puras)}$$

$$\varphi_e = \text{arctang} \frac{X}{R} = \text{arctang} \frac{0.02 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}{10} = 32.14^o$$

Así, según (1) y tomando V_1 como origen de fases, la intensidad I_1 vale:

$$\bar{I}_1 = 11.78 \angle 55.08^o + 3.94 \angle 90^o + 10.75 \angle 57.86^o$$

$$\bar{I}_1 = 6.74 + j\,9.65 + j\,3.94 + 5.71 + j\,9.10 = 12.45 + j\,22.69 = 25.88 \angle 61.24^o$$

$$\bar{I}_1 = 25.88 \angle 61.24^\circ$$

Y las intensidades I_2 e I_3:

$$\bar{I}_2 = 25.88 \angle 301.24^\circ$$

$$\bar{I}_3 = 25.88 \angle 181.24^\circ$$

PROBLEMA Nº 45

A una línea trifásica de tensión compuesta 380 V se conecta un motor trifásico de potencia útil 10 CV, rendimiento 95 % y factor de potencia 0.866 (φ = 30º). Se dispone de un vatímetro monofásico.

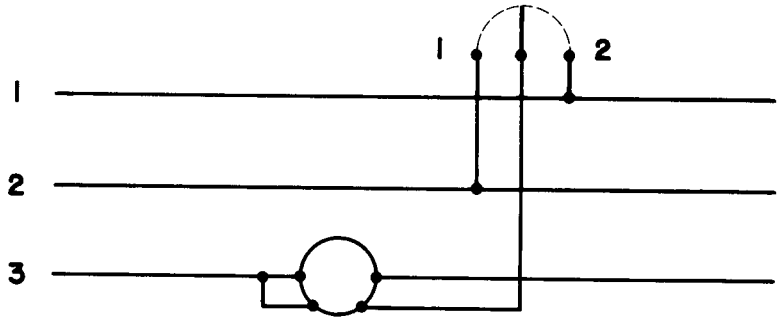
Se pide:

a) ¿cómo debería conectarse dicho vatímetro para medir la potencia activa?.
b) ¿y la potencia reactiva?.

Solución

a) La potencia activa que absorbe un receptor o conjunto de receptores equilibrados, se puede determinar a partir de las lecturas efectuadas en un vatímetro monofásico conectado con la bobina amperimétrica en cualquiera de las fases, y la voltimétrica entre dicha fase y un conmutador que tenga su entrada conectada a la bobina voltimétrica y las salidas a cada una de las otras dos fases. La suma de las dos lecturas (una en cada posición del conmutador) es igual a la potencia activa absorbida por la instalación.

Por ejemplo, se puede conectar la bobina amperimétrica en la fase T y las salidas del conmutador en las fases R y S. El esquema eléctrico correspondiente se muestra a continuación:



En la posición 1 la lectura sería:

$$W_1 = V_1 \cdot I_3 \cdot \cos(-V_1, I_3)$$

Y en la posición 2:

$$W_2 = V_2 \cdot I_3 \cdot \cos(V_2, I_3)$$

Por ser el receptor o grupo de receptores equilibrados se verifica:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$$

Según esto, las lecturas de los dos vatímetros podrían expresarse como:

$$W_1 = V \cdot I \cdot \cos(30^o - \varphi)$$

$$W_2 = V \cdot I \cdot \cos(30^o + \varphi)$$

Desarrollando las dos expresiones anteriores resulta:

$$W_1 = V \cdot I \cdot (\cos 30^o \cdot \cos\varphi + \operatorname{sen} 30^o \cdot \operatorname{sen}\varphi)$$

$$W_2 = V \cdot I \cdot (\cos 30^o \cdot \cos\varphi - \operatorname{sen} 30^o \cdot \operatorname{sen}\varphi)$$

y sumando miembro a miembro:

$$W_1 + W_2 = 2 \cdot V \cdot I \cdot \cos 30^o \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi$$

Luego, efectivamente la suma de las dos lecturas es igual a la potencia activa que absorbe el receptor.

En este caso, el motor absorbe una potencia activa de:

$$P = \frac{10 \cdot 736}{0.95} = 7747.37 \text{ W}$$

La intensidad que toma de la línea vale:

$$I = \frac{7747.37}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0.866} = 13.59 \text{ A}$$

Según la conexión del vatímetro anteriormente descrita, la lectura en cada una de las dos posiciones del conmutador sería:

$$W_1 = 380 \cdot 13.59 \cdot \cos(30^o - 30^o) = 5164.91\,W$$

$$W_2 = 380 \cdot 13.59 \cdot \cos(30^o + 30^o) = 2582.45\,W$$

y la suma de ambas lecturas:

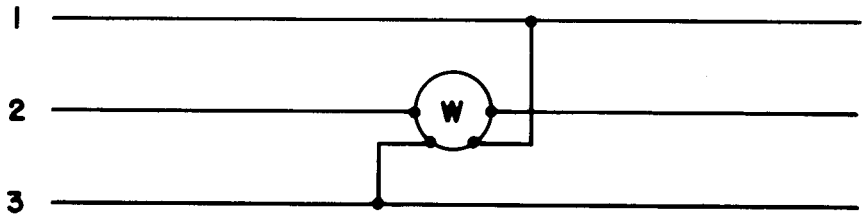
$$W_1 + W_2 = 5164.91 + 2582.45 = 7747.36\,W$$

Valor que coincide con el calculado a partir de la potencia útil y el rendimiento del motor.

b) La potencia reactiva se puede determinar también a partir de la lectura de un solo vatímetro monofásico, conectado de forma que su bobina amperimétrica quede en serie con cualquiera de las tres fases, y la voltimétrica entre las otras dos. La lectura del vatímetro multiplicada por $\sqrt{3}$ es igual a la potencia reactiva de la instalación.

Si, por ejemplo, la conexión se efectúa como se indica en la figura, la lectura del vatímetro sería:

$$W = V_2 \cdot I_2 \cdot \cos(V_2, I_2)$$



Como en el caso anterior, por ser el sistema equilibrado se verifica:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$$

Por lo tanto, la lectura del vatímetro quedaría:

$$W = V \cdot I \cdot \cos(90^o - \varphi) = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

Multiplicando la expresión anterior por $\sqrt{3}$, tal como se ha dicho anteriormente, se obtiene:

$$\sqrt{3} \cdot W = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

que es precisamente la potencia reactiva del conjunto receptor.

En este caso, la potencia reactiva del motor calculada a partir de la potencia útil, del rendimiento y del factor de potencia vale:

$$Q = P \cdot \operatorname{tang}\varphi = \frac{10 \cdot 736}{0.95} \cdot \operatorname{tang} 30^o = 4472.33 \text{ VAr}$$

Y la potencia reactiva calculada a partir de la lectura del vatímetro es:

$$\sqrt{3} \cdot W = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 13.59 \cdot \operatorname{sen} 30^o = 4472.33 \text{ VAr}$$

Efectivamente, ambos valores coinciden.

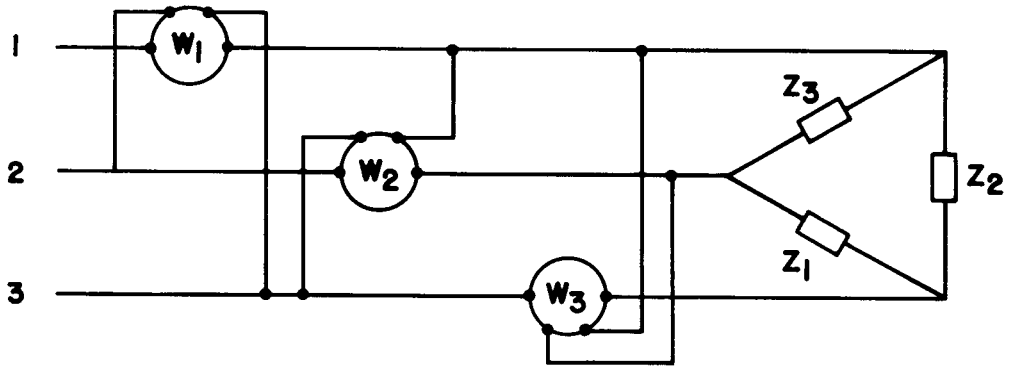
PROBLEMA Nº 46

Un receptor trifásico constituido por tres impedancias Z_1, Z_2 y Z_3, conectadas en triángulo y cuyos valores son:

$$\overline{Z}_1 = 1 + j\sqrt{3} \qquad \overline{Z}_2 = \sqrt{3} + j \qquad \overline{Z}_3 = j\,2$$

está conectado a una línea trifásica cuya tensión entre fases es de 220 V.

Se disponen tres vatímetros monofásicos según se indica en el esquema adjunto. Determinar la potencia reactiva del receptor a partir de las lecturas de los tres vatímetros.



Solución

Por tratarse de un sistema receptor desequilibrado no puede determinarse la potencia reactiva a partir de la lectura de un solo vatímetro, tal como se explicó en el problema anterior.

Con arreglo a su conexión, las lecturas de los tres vatímetros son:

$$\begin{aligned} W_1 &= V_1 \cdot I_1 \cdot \cos(V_1, I_1) \\ W_2 &= V_2 \cdot I_2 \cdot \cos(V_2, I_2) \\ W_3 &= V_3 \cdot I_3 \cdot \cos(V_3, I_3) \end{aligned} \qquad (1)$$

Llamando $_1$, $_2$ y $_3$ a los desfases entre las intensidades y tensiones en las impedancias Z_1, Z_2 y Z_3, respectivamente, se verifica:

$$(V_1, I_1) = 90^o - \varphi_1 \qquad (V_2, I_2) = 90^o - \varphi_2 \qquad (V_3, I_3) = 90^o - \varphi_3$$

Y por estar las tensiones de línea equilibradas se cumple:

$$V = \sqrt{3} \cdot U$$

Por lo tanto, las lecturas de los vatímetros se pueden escribir de la forma:

$$W_1 = \sqrt{3} \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \cos(90^o - \varphi_1) = \sqrt{3} \cdot U_1 \cdot I_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1$$
$$W_2 = \sqrt{3} \cdot U_2 \cdot I_2 \cdot \cos(90^o - \varphi_2) = \sqrt{3} \cdot U_2 \cdot I_2 \cdot \operatorname{sen} \varphi_2$$
$$W_3 = \sqrt{3} \cdot U_3 \cdot I_3 \cdot \cos(90^o - \varphi_3) = \sqrt{3} \cdot U_3 \cdot I_3 \cdot \operatorname{sen} \varphi_3$$

Sumando las tres igualdades miembro a miembro resulta:

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sqrt{3} \cdot (U_1 \cdot I_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \operatorname{sen} \varphi_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \operatorname{sen} \varphi_3) \qquad (2)$$

Cualquier receptor, sea o no equilibrado, conectado en triángulo, se puede transformar en uno conectado en estrella equivalente, que absorbe la misma intensidad por cada hilo de la línea. Las potencias reactivas del receptor conectado en triángulo y de su equivalente en estrella son iguales.

La expresión que da la potencia reactiva en el receptor equivalente en estrella es:

$$Q = U_1 \cdot I_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \operatorname{sen} \varphi_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \operatorname{sen} \varphi_3$$

Puede observarse que la expresión (2) dividida por $\sqrt{3}$ es justamente la potencia reactiva del receptor. Por lo tanto, se verifica:

$$Q = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\sqrt{3}}$$

Es decir, la suma de las lecturas de tres vatímetros conectados de forma que sus bobinas amperimétricas estén en serie con cada una de las fases y las voltimétricas conectadas a las otras dos fases, dividida por $\sqrt{3}$, determina el valor de la potencia reactiva del sistema receptor.

En el caso de este ejercicio, para determinar las lecturas de los tres vatímetros, hay que calcular en primer lugar los valores de las intensidades compuestas y los desfases de dichas intensidades con las tensiones de línea.

Las expresiones que relacionan las intensidades compuestas con las que circulan por las impedancias, conectadas en triángulo, son:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{J}_3 - \bar{J}_2 \\ \bar{I}_2 &= \bar{J}_1 - \bar{J}_3 \\ \bar{I}_3 &= \bar{J}_2 - \bar{J}_1 \end{aligned} \qquad (3)$$

donde:

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_1} \qquad \bar{J}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} \qquad \bar{J}_3 = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_3}$$

Las expresiones complejas de las impedancias son:

$$\bar{Z}_1 = 1 + j\sqrt{3} = 2\left|\underline{60^o}\right.$$

$$\bar{Z}_2 = \sqrt{3} + j = 2\left|\underline{30^o}\right.$$

$$\bar{Z}_3 = j\,2 = 2\left|\underline{90^o}\right.$$

Por lo tanto, tomando V_1 como origen de fases, las intensidades simples valen:

$$\bar{J}_1 = \frac{220\left|\underline{0^o}\right.}{2\left|\underline{60^o}\right.} = 110\left|\underline{-60^o}\right.$$

$$\bar{J}_2 = \frac{220\left|\underline{240^o}\right.}{2\left|\underline{30^o}\right.} = 110\left|\underline{210^o}\right.$$

$$\bar{J}_3 = \frac{220\left|\underline{120^o}\right.}{2\left|\underline{90^o}\right.} = 110\left|\underline{30^o}\right.$$

Y según (3), las expresiones complejas de las intensidades compuestas resultan:

$$\bar{I}_1 = 110\left|\underline{30^o} - 110\right|\underline{210^o} = 95.26 + j\,55 + 95.26 + j\,55 = 190.52 + j\,110 = 220\left|\underline{30^o}\right.$$

$$\bar{I}_2 = 110\left|\underline{-60^o} - 110\right|\underline{30^o} = 55 - j\,95.26 - 95.26 - j\,55 = -40.26 - j\,150.26 = 155.56\left|\underline{255^o}\right.$$

$$\bar{I}_3 = 110\left|\underline{210^o} - 110\right|\underline{-60^o} = -95.26 - j\,55 - 55 + j\,95.26 = -150.26 + j\,40.26 = 155.56\left|\underline{165^o}\right.$$

En cuanto a los desfases, sus valores son:

$$(V_1, I_1) = 30^o \qquad (V_2, I_2) = 15^o \qquad (V_3, I_3) = 45^o$$

Por lo tanto, de acuerdo con (1), las lecturas de los tres vatímetros son:

$$W_1 = 220 \cdot 220 \cdot \cos 30^o = 41915.63 \text{ VAr}$$

$$W_2 = 220 \cdot 155.56 \cdot \cos 15^o = 33057.07 \text{ VAr}$$

$$W_3 = 220 \cdot 155.56 \cdot \cos 45^o = 24199.45 \text{ VAr}$$

Y la potencia reactiva que toma el sistema vale:

$$Q = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\sqrt{3}} = \frac{99172.16}{\sqrt{3}} = 57257.07 \text{ VAr}$$

$$Q = 57257.07 \text{ VAr}$$

Como comprobación se puede calcular la potencia reactiva del receptor a partir de la que toma la reactancia de cada impedancia, es decir:

$$Q = J_1^2 \cdot X_1 + J_2^2 \cdot X_2 + J_3^2 \cdot X_3$$

Por ser en este caso:

$$J_1 = J_2 = J_3 = J$$

$$Q = J^2 \cdot (X_1 + X_2 + X_3)$$

Sustituyendo en la expresión anterior resulta:

$$Q = 110^2 \cdot (\sqrt{3} + 1 + 2) = 57257.81 \text{ VAr}$$

valor que coincide con el obtenido a partir de las lecturas de los tres vatímetros.

PROBLEMA Nº 47

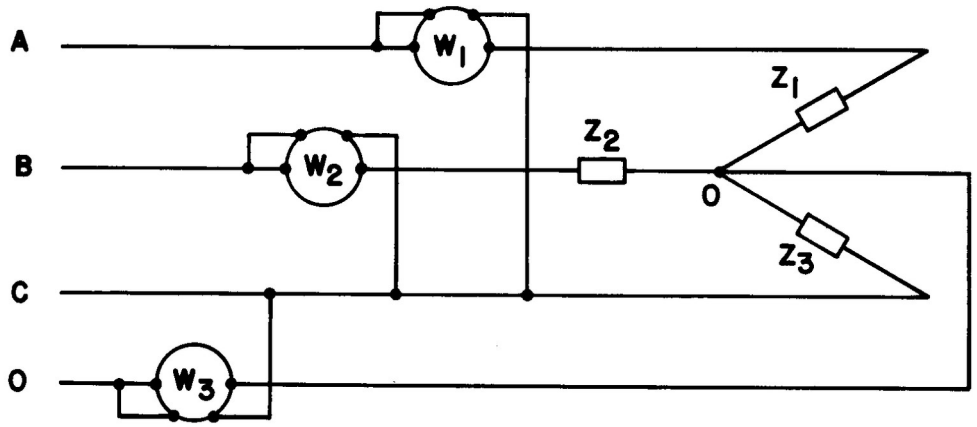
En el esquema adjunto, la tensión entre fases es de 600 V y la frecuencia 50 Hz, constituyendo un sistema equilibrado de tensiones con sucesión de fases A-B-C.

Las impedancias Z_1, Z_2 y Z_3 valen, respectivamente:

$$\bar{Z}_1 = 20 + j\,30 \qquad \bar{Z}_2 = 40 - j\,50 \qquad \bar{Z}_3 = 50$$

Determinar:

a) la intensidad en cada conductor A, B y C.
b) la intensidad en el hilo neutro.
c) la lectura de cada vatímetro W_1, W_2 y W_3.
d) demostrar que la suma de las lecturas de los tres vatímetros es igual a la potencia activa absorbida por las tres impedancias.



Solución

a) Por estar las tres impedancias conectadas en estrella, las intensidades en cada conductor de la línea coinciden con las que circulan por las impedancias, siendo su valor:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1} \qquad \bar{I}_2 = \bar{J}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} \qquad \bar{I}_3 = \bar{J}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3}$$

Las expresiones complejas de las impedancias son:

$$\bar{Z}_1 = 20 + j\,30 = 36.06 \left| \underline{56.31^o} \right.$$

$$\bar{Z}_2 = 40 - j\,50 = 64.03 \left| \underline{-\,51.34^o} \right.$$

$$\bar{Z}_3 = 50 = 50 \left| \underline{0^o} \right.$$

Por lo tanto, tomando V_1 como origen de fases, las intensidades en cada conductor de la línea valen:

$$\bar{I}_1 = \frac{\frac{600}{\sqrt{3}} \left| \underline{90^o} \right.}{36.06 \left| \underline{56.31^o} \right.} = 9.61 \left| \underline{33.69^o} \right.$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\frac{600}{\sqrt{3}} \left| \underline{330^o} \right.}{64.03 \left| \underline{-\,51.34^o} \right.} = 5.41 \left| \underline{21.34^o} \right.$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\frac{600}{\sqrt{3}} \left| \underline{210^o} \right.}{50 \left| \underline{0^o} \right.} = 6.93 \left| \underline{210^o} \right.$$

$$\bar{I}_1 = 9.61 \left| \underline{33.69^o} \right. \qquad \bar{I}_2 = 5.41 \left| \underline{21.34^o} \right. \qquad \bar{I}_3 = 6.93 \left| \underline{210^o} \right.$$

b) La intensidad en el hilo neutro vale:

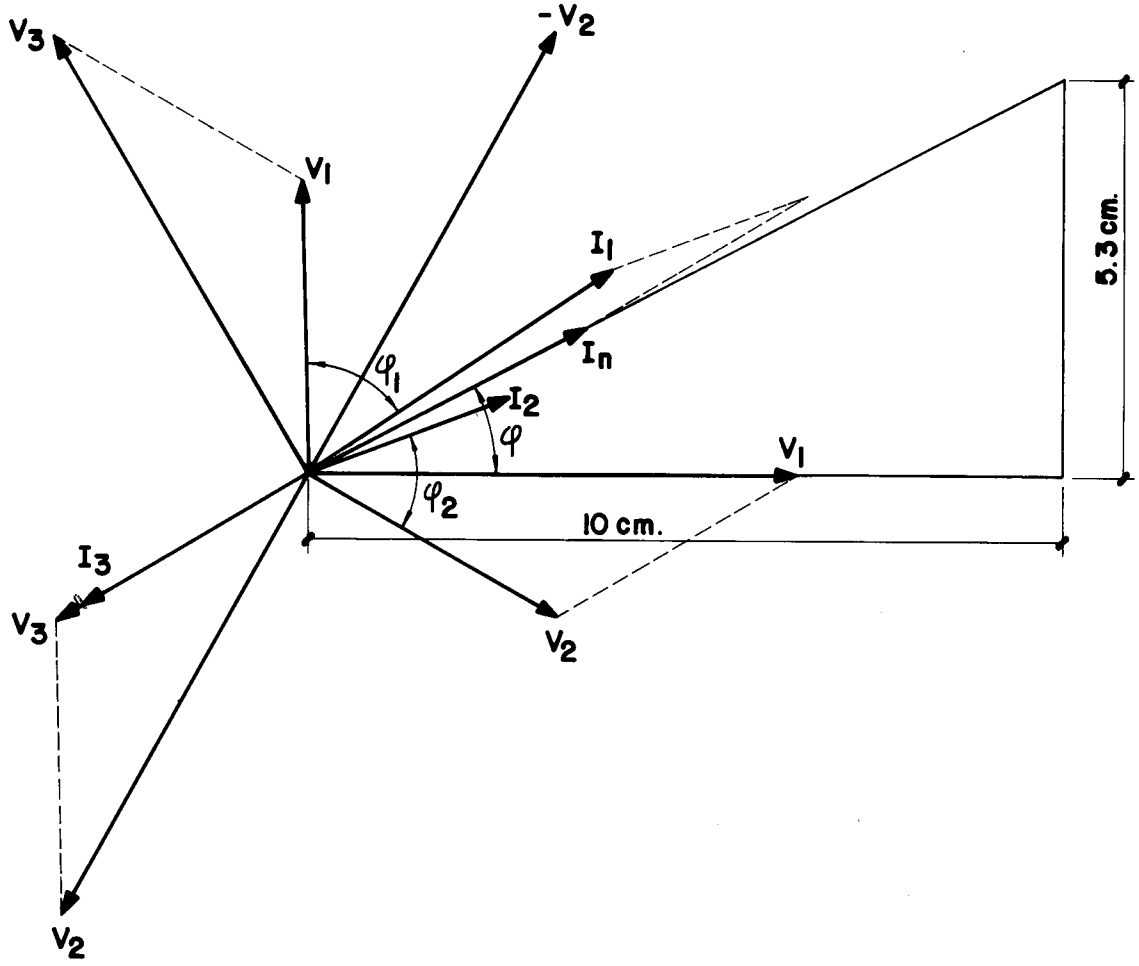
$$\bar{I}_n = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \qquad (1)$$

$$\bar{I}_n = 9.61 \left| \underline{33.69^o} \right. + 5.41 \left| \underline{21.34^o} \right. + 6.93 \left| \underline{210^o} \right. = 7.04 + j\,3.83 = 8.01 \left| \underline{28.55^o} \right.$$

$$\bar{I}_n = 8.01 \left| \underline{28.55^o} \right.$$

La intensidad en el neutro también puede obtenerse gráficamente, representando I_1, I_2 e I_3 en un diagrama vectorial de tensiones e intensidades y realizando la suma vectorial (1).

En el diagrama adjunto se ha tomado para las intensidades una escala 1 A = 0.5 cm.



Sobre el diagrama se ha obtenido:

$$I_n = 4.1\,cm \quad \Rightarrow \quad I_n = 4.1/0.5 = 8.2\,A$$

También se obtiene gráficamente el ángulo que forma I_n con el origen de fases V_1:

$$tang\varphi = \frac{5.3}{10} = 0.53 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 28^{\circ}$$

Los resultados son casi iguales a los obtenidos mediante el cálculo complejo.

c) La lectura de cada vatímetro es:

$$W_1 = V_2 \cdot I_1 \cdot \cos(-V_2, I_1)$$

$$W_2 = V_1 \cdot I_2 \cdot \cos(V_1, I_2)$$
$$W_3 = U_3 \cdot I_n \cdot \cos(U_3, I_n)$$

Sustituyendo valores en las expresiones anteriores:

$$W_1 = 600 \cdot 9.61 \cdot \cos(60^o - 33.69^o) = 600 \cdot 9.61 \cdot \cos 26.31^o = 5168.69\ W$$
$$W_2 = 600 \cdot 5.41 \cdot \cos(0^o - 21.34^o) = 600 \cdot 5.41 \cdot \cos(-21.34^o) = 3023.45\ W$$
$$W_3 = \frac{600}{\sqrt{3}} \cdot 8.01 \cdot \cos(210^o - 28.55^o) = 346.41 \cdot 8.01 \cdot \cos 181.45^o = -2773.86\ W$$
$$W_1 = 5168.69\ W \qquad W_2 = 3023.45\ W \qquad W_3 = -2773.86\ W$$

d) La suma de las potencias instantáneas en los vatímetros es:

$$p = -v_2 \cdot i_1 + v_1 \cdot i_2 + u_3 \cdot i_n \tag{2}$$

Como el circuito es a cuatro hilos se cumple:

$$i_n = i_1 + i_2 + i_3 \tag{3}$$

Además, por ser un sistema equilibrado en tensiones también se verifica:

$$v_2 = u_3 - u_1 \qquad v_1 = u_2 - u_3 \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2), resulta:

$$p = -(u_3 - u_1) \cdot i_1 + (u_2 - u_3) \cdot i_2 + u_3 \cdot (i_1 + i_2 + i_3)$$
$$p = -i_1 \cdot u_3 + i_1 \cdot u_1 + i_2 \cdot u_2 - i_2 \cdot u_3 + i_1 \cdot u_3 + i_2 \cdot u_3 + i_3 \cdot u_3$$
$$p = i_1 \cdot u_1 + i_2 \cdot u_2 + i_3 \cdot u_3$$

Pasando a valores medios:

$$P = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos(U_1, I_1) + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos(U_2, I_2) + U_3 \cdot I_3 \cdot \cos(U_3, I_3) \tag{5}$$

Teniendo en cuenta que:

$$(U_1, I_1) = \varphi_1 \qquad (U_2, I_2) = \varphi_2 \qquad (U_3, I_3) = \varphi_3$$

la expresión (5) resulta:

$$P = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos\varphi_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \cos\varphi_3$$

La ecuación anterior es la potencia activa absorbida por las tres impedancias, tal como se quería demostrar.

Como comprobación, a continuación se compara la suma de las lecturas de los tres vatímetros con la suma de las potencias que se disipan por Joule en las resistencias de las impedancias.

La suma de las lecturas de los tres vatímetros vale:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 5168.69 + 3023.45 - 2773.86 = 5418.28\,W$$

Y la suma de las potencias que se disipan en las resistencias de las impedancias:

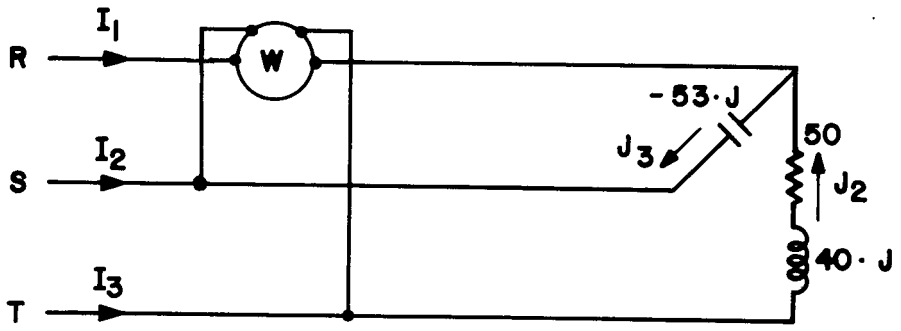
$$P = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 = 9.61^2 \cdot 20 + 5.41^2 \cdot 40 + 6.93^2 \cdot 50 = 5419.01\,W$$

La pequeña diferencia entre ambos resultados se debe a errores cometidos en el cálculo.

PROBLEMA Nº 48

A una línea trifásica equilibrada con orden de sucesión de fases R, S y T, y tensión compuesta de 440 V, se conecta un receptor tal como se indica en la figura.

Si el vatímetro monofásico que figura en el esquema, no tiene más que una escala de lecturas a la derecha del cero, ¿habría que hacer alguna modificación?.



Solución

La lectura del vatímetro es:

$$W = V_1 \cdot I_1 \cdot \cos(V_1, I_1) \qquad (1)$$

En la expresión anterior se desconoce el valor de la intensidad I_1, así como el ángulo que forman V_1 e I_1.

Por Kirchhoff:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2 \qquad (2)$$

Los valores de las intensidades que circulan por los receptores son:

$$\bar{J}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2} \qquad \bar{J}_3 = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_3} \tag{3}$$

Tomando V_1 como origen de fases, las expresiones complejas de las tensiones compuestas son:

$$\bar{V}_1 = 440 \angle 0^o \qquad \bar{V}_2 = 440 \angle 240^o \qquad \bar{V}_3 = 440 \angle 120^o \tag{4}$$

y de las impedancias Z_2 y Z_3:

$$\bar{Z}_2 = 50 + j\,40 = 64.03 \angle 38.66^o \qquad \bar{Z}_3 = -j\,53 = 53 \angle -90^o \tag{5}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3), resulta:

$$\bar{J}_2 = \frac{440 \angle 240^o}{64.03 \angle 38.66^o} = 6.87 \angle 201.34^o$$

$$\bar{J}_3 = \frac{440 \angle 120^o}{53 \angle -90^o} = 8.30 \angle 210^o$$

Por lo tanto, según (2), la intensidad I_1 vale:

$$\bar{I}_1 = 8.30 \angle 210^o - 6.87 \angle 201.34^o = -0.79 - j\,1.65 = 1.83 \angle 244.42^o$$

y el ángulo que forman V_1 e I_1:

$$(V_1, I_1) = 0^o - 244.42^o = -244.42^o$$

Finalmente, de acuerdo a la expresión (1), la lectura del vatímetro es:

$$W = 440 \cdot 1.83 \cdot \cos(-244.42^o) = -347.66\ W$$

Es decir, con la conexión que figura en el esquema del enunciado, el vatímetro no marcaría nada, ya que, al obtenerse un valor negativo, la aguja tendería a moverse hacia la izquierda del cero, y, al no tener el vatímetro más que una escala a la derecha del cero, no se obtendría ninguna lectura. Si se modifica la conexión de una de las bobinas, por ejemplo de la voltimétrica, la aguja marcaría a la derecha del cero, que es donde el vatímetro tiene la escala.

En ese caso, la lectura del vatímetro sería:

$$W = V_1 \cdot I_1 \cdot \cos(-V_1, I_1)$$

El ángulo que forman $-V_1$ con I_1 es:

$$(-V_1, I_1) = 180^o - 244.42^o = -64.42^o$$

Y, por consiguiente:

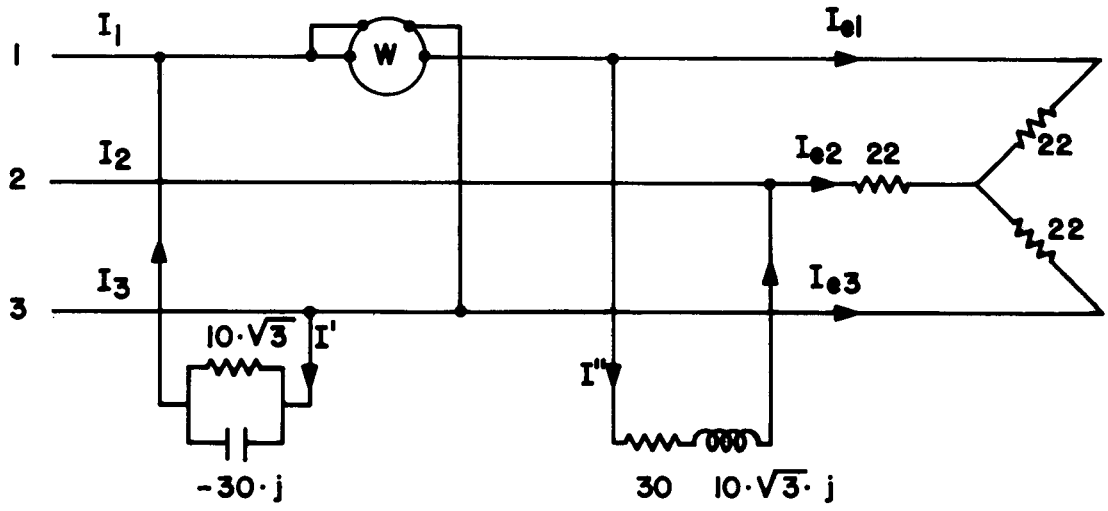
$$W = 440 \cdot 1.83 \cdot \cos(-64.42^o) = 347.66\ W$$

Con lo que sí se obtendría una lectura dentro de la escala del aparato.

PROBLEMA Nº 49

La figura representa una instalación a tres hilos, con tensión compuesta 380 V.

Se desea calcular las intensidades que circulan por los hilos de la línea y la lectura del vatímetro representado.



Solución

Las intensidades que circulan por los hilos de la línea son:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= -\bar{I}' + \bar{I}'' + \bar{I}_{e1} \\ \bar{I}_2 &= -\bar{I}'' + \bar{I}_{e2} \\ \bar{I}_3 &= \bar{I}' + \bar{I}_{e3} \end{aligned} \qquad (1)$$

Las expresiones complejas de las tensiones compuestas son:

$$\bar{V}_1 = 380\,\underline{|\,0^\circ} \qquad \bar{V}_2 = 380\,\underline{|\,240^\circ} \qquad \bar{V}_3 = 380\,\underline{|\,120^\circ}$$

y las de las tensiones simples:

$$\bar{U}_1 = 219.39\,\underline{|\,90^\circ} \qquad \bar{U}_2 = 219.39\,\underline{|\,330^\circ} \qquad \bar{U}_3 = 219.39\,\underline{|\,210^\circ}$$

Las intensidades absorbidas por el receptor conectado en estrella valen:

$$\bar{I}_{e1} = \frac{\bar{U}_1}{R_1} = \frac{219.39 \angle 90^o}{22} = 9.97 \angle 90^o$$

$$\bar{I}_{e2} = \frac{\bar{U}_2}{R_2} = \frac{219.39 \angle 330^o}{22} = 9.97 \angle 330^o$$

$$\bar{I}_{e3} = \frac{\bar{U}_3}{R_3} = \frac{219.39 \angle 210^o}{22} = 9.97 \angle 210^o$$

La intensidad que absorbe el receptor monofásico conectado a V_3 es:

$$\bar{I}'' = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{380 \angle 120^o}{30 + j10 \cdot \sqrt{3}} = \frac{380 \angle 120^o}{34.64 \angle 30^o} = 10.97 \angle 90^o$$

donde Z_3 es la impedancia equivalente del circuito serie.

Respecto a la intensidad absorbida por el receptor monofásico conectado a V_2:

$$\bar{I}' = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_2}$$

siendo Z_2 la impedancia equivalente del circuito paralelo, de valor:

$$\bar{Z}_2 = \frac{10 \cdot \sqrt{3} \cdot 30 \angle -90^o}{10 \cdot \sqrt{3} + 30 \angle -90^o} = \frac{519.61 \angle -90^o}{34.64 \angle -60^o} = 15 \angle -30^o$$

Por lo tanto:

$$\bar{I}' = \frac{380 \angle 240^o}{15 \angle -30^o} = 25.33 \angle 270^o$$

Finalmente, de acuerdo con las expresiones (1), las intensidades compuestas o de línea valen:

$$\bar{I}_1 = 25.33 \angle 90^o + 10.97 \angle 90^o + 9.97 \angle 90^o = 46.27 \angle 90^o$$

$$\bar{I}_2 = 10.97 \angle 270^o + 9.97 \angle 330^o = 18.14 \angle 298.42^o$$

$$\bar{I}_3 = 25.33 \angle 270^o + 9.97 \angle 210^o = 31.51 \angle 254.11^o$$

$$\bar{I}_1 = 46.27 \angle 90^o \qquad \bar{I}_2 = 18.14 \angle 298.42^o \qquad \bar{I}_3 = 31.51 \angle 254.11^o$$

La lectura del vatímetro es:

$$W = V_2 \cdot I_a \cdot \cos(-V_2, I_a)$$

La intensidad que circula por la bobina amperimétrica del vatímetro es:

$$\bar{I}_a = \bar{I}'' + \bar{I}_{e1} = 10.97 \angle 90^o + 9.97 \angle 90^o = 20.94 \angle 90^o$$

y el ángulo que forma $-V_2$ con I_a:

$$(-V_2, I_a) = 60^o - 90^o = -30^o$$

En consecuencia, la lectura del vatímetro de la figura es:

$$W = 380 \cdot 20.94 \cdot \cos(-30^o) = 6891.14\ W$$

$$W = 6891.14\ W$$

PROBLEMA Nº 50

Una línea trifásica equilibrada, cuyo orden de sucesión de fases es 1, 2 y 3, alimenta, con una tensión de línea de 380 V, tres impedancias conectadas en estrella, de valores:

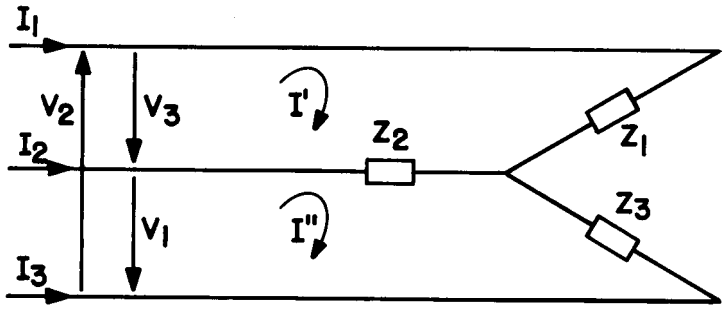
$$\bar{Z}_1 = 4 + j\,3 \qquad \bar{Z}_2 = 3 + j\,4 \qquad \bar{Z}_3 = 5$$

Calcular las intensidades en los hilos de la línea.

Solución

Las tres impedancias constituyen un receptor trifásico desequilibrado en estrella.

El esquema eléctrico de la instalación es:



Este problema se puede resolver como se ha visto en ejercicios anteriores, es decir, transformando la estrella en triángulo, calculando las intensidades que absorben las impedancias en triángulo y, por suma de dichas intensidades, obtener las compuestas o de línea. Se propone al alumno seguir este procedimiento y comparar los resultados con los que se calculan a continuación mediante el método de las mallas.

Para la resolución del ejercicio por el método de las mallas se establecen dos intensidades ficticias, I' e I'', tal como se muestra en el esquema, y se plantean las siguientes ecuaciones de malla:

$$\bar{V}_3 = \bar{I}' \cdot (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) - \bar{I}'' \cdot \bar{Z}_2$$

$$\bar{V}_1 = -\bar{I}' \cdot \bar{Z}_2 + \bar{I}'' \cdot (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)$$

Las dos ecuaciones anteriores constituyen un sistema cuya solución es:

$$\bar{I}' = \frac{\begin{vmatrix} \bar{V}_3 & -\bar{Z}_2 \\ \bar{V}_1 & \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 & -\bar{Z}_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 \end{vmatrix}} = \frac{\bar{V}_3 \cdot (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) + \bar{V}_1 \cdot \bar{Z}_2}{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \cdot (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) - \bar{Z}_2^2}$$

$$\bar{I}'' = \frac{\begin{vmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 & \bar{V}_3 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{V}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 & -\bar{Z}_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 \end{vmatrix}} = \frac{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \cdot \bar{V}_1 + \bar{V}_3 \cdot \bar{Z}_2}{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \cdot (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3) - \bar{Z}_2^2}$$

Tomando V_1 como origen de fases, las expresiones complejas de las tensiones compuestas son:

$$\bar{V}_1 = 380 \angle 0^\circ \qquad \bar{V}_2 = 380 \angle 240^\circ \qquad \bar{V}_3 = 380 \angle 120^\circ$$

y las de las impedancias:

$$\bar{Z}_1 = 4 + j3 = 5 \angle 36.87^\circ \qquad \bar{Z}_2 = 3 + j4 = 5 \angle 53.13^\circ \qquad \bar{Z}_3 = 5 = 5 \angle 0^\circ$$

Por lo tanto, se verifica:

$$\bar{I}' = \frac{380 \angle 120^\circ \cdot (3 + j4 + 5) + 380 \angle 0^\circ \cdot 5 \angle 53.13^\circ}{(4 + j3 + 3 + j4) \cdot (3 + j4 + 5) - (5 \angle 53.13^\circ)^2} = \frac{380 \angle 120^\circ \cdot (8 + j4) + 1900 \angle 53.13^\circ}{(7 + j7) \cdot (8 + j4) - 25 \angle 106.26^\circ}$$

$$\bar{I}' = \frac{380 \angle 120^\circ \cdot 8.94 \angle 26.56^\circ + 1900 \angle 53.13^\circ}{88.50 \angle 71.56^\circ - 25 \angle 106.26^\circ} = \frac{-2834.83 + j1872.07 + 1140 + j1520}{28 + j83.95 + 7 - j24}$$

$$\bar{I}' = \frac{-1694.83 + j3392.07}{35 + j59.95} = \frac{3791.91 \angle 116.54^\circ}{69.41 \angle 59.72^\circ} = 54.63 \angle 56.82^\circ$$

$$\bar{I}'' = \frac{(4 + j3 + 3 + j4) \cdot 380 \angle 0^\circ + 380 \angle 120^\circ \cdot 5 \angle 53.13^\circ}{(4 + j3 + 3 + j4) \cdot (3 + j4 + 5) - (5 \angle 53.13^\circ)^2} = \frac{(7 + j7) \cdot 380 \angle 0^\circ + 1900 \angle 173.13^\circ}{(7 + j7) \cdot (8 + j4) - 25 \angle 106.26^\circ}$$

$$\bar{I}'' = \frac{9.9 \angle 45^\circ \cdot 380 \angle 0^\circ + 1900 \angle 173.13^\circ}{88.50 \angle 71.56^\circ - 25 \angle 106.26^\circ} = \frac{2660.13 + j2660.13 - 1886.35 + j227.27}{28 + j83.95 + 7 - j24}$$

$$\bar{I}'' = \frac{773.78 + j2887.4}{35 + j59.95} = \frac{2989.28 \angle 75^\circ}{69.41 \angle 59.72^\circ} = 43.06 \angle 15.28^\circ$$

Una vez conocidas estas intensidades ficticias, es posible calcular las intensidades en los hilos de la línea, ya que se verifica:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}' = 54.63 \angle 56.82^\circ$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}'' - \bar{I}' = 36.29 \angle 288.71^\circ$$

$$\bar{I}_3 = -\bar{I}'' = 43.06 \angle 195.28^\circ$$

$\bar{I}_1 = 54.63 \angle 56.82^\circ$ $\bar{I}_2 = 36.29 \angle 288.71^\circ$ $\bar{I}_3 = 43.06 \angle 195.28^\circ$