PROBLEMA Nº 51

A una red trifásica 1,2, 3, con tensión de línea 380 V y frecuencia 50 Hz, se conectan tres impedancias en estrella, cuyos valores son:

$$\bar{Z}_1 = 20 - j10 \qquad \bar{Z}_2 = 20 + j10 \qquad \bar{Z}_3 = 30$$

Se pide calcular:

a) el circuito en triángulo equivalente.
b) las intensidades en cada uno de los tres hilos de la línea.
c) las tensiones existentes entre el centro de la estrella (punto neutro real) y cada uno de los hilos de la línea.
d) las potencias activas que se medirían por el método de los dos vatímetros.
e) las potencias reactivas que se medirían por el método de los dos vatímetros.
f) la diferencia de potencial entre el centro de la estrella (punto neutro real) y el neutro (punto neutro ficticio).

Solución

a) Según se dedujo en el problema nº 8, las expresiones que permiten calcular el circuito equivalente en triángulo de cualquier conjunto de impedancias conectadas en estrella, son:

$$\bar{\lambda}_{12} = \frac{\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3}$$

$$\bar{\lambda}_{23} = \frac{\bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3}{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3} \qquad (1)$$

$$\bar{\lambda}_{31} = \frac{\bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3}$$

Las expresiones complejas de las impedancias conectadas en estrella son:

$$\bar{Z}_1 = 20 - j10 = 22.36 \angle -26.57^\circ$$

$$\bar{Z}_2 = 20 + j10 = 22.36 \angle 26.57^\circ$$

$$\bar{Z}_3 = 30 = 30 \angle 0^\circ$$

y las admitancias correspondientes:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_1} = 4.47 \cdot 10^{-2} \angle 26.57^\circ$$

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{\bar{Z}_2} = 4.47 \cdot 10^{-2} \angle -26.57^\circ$$

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{1}{\bar{Z}_3} = 3.33 \cdot 10^{-2} \angle 0^\circ$$

El producto de las admitancias dos a dos es:

$$\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 = 0.002 \angle 0^\circ$$

$$\bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 = 1.49 \cdot 10^{-3} \angle -26.57^\circ$$

$$\bar{\lambda}_3 \cdot \bar{\lambda}_1 = 1.49 \cdot 10^{-3} \angle 26.57^\circ$$

y la suma de las tres:

$$\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 = 0.11 \angle 0^\circ$$

En consecuencia, según (1), las admitancias del circuito equivalente conectado en triángulo valen:

$$\bar{\lambda}_{12} = \frac{0.002 \angle 0^\circ}{0.11 \angle 0^\circ} = 1.76 \cdot 10^{-2} \angle 0^\circ$$

$$\bar{\lambda}_{23} = \frac{1.49 \cdot 10^{-3} \angle -26.57^\circ}{0.11 \angle 0^\circ} = 1.31 \cdot 10^{-2} \angle -26.57^\circ$$

$$\bar{\lambda}_{31} = \frac{1.49 \cdot 10^{-3} \angle 26.57^\circ}{0.11 \angle 0^\circ} = 1.31 \cdot 10^{-2} \angle 26.57^\circ$$

y las impedancias correspondientes a estas admitancias:

$$\bar{Z}_{12} = \frac{1}{\bar{\lambda}_{12}} = 56.66 \angle 0^\circ$$

$$\bar{Z}_{23} = \frac{1}{\bar{\lambda}_{23}} = 76.06 \angle 26.57^\circ$$

$$\bar{Z}_{31} = \frac{1}{\bar{\lambda}_{31}} = 76.06 \angle -26.57^\circ$$

$$\bar{Z}_{12} = 56.66 \angle 0^\circ \qquad \bar{Z}_{23} = 76.06 \angle 26.57^\circ \qquad \bar{Z}_{31} = 76.06 \angle -26.57^\circ$$

b) Para determinar las intensidades que toma el receptor conectado en estrella de cada hilo de la línea, en primer lugar se transforma la estrella en triángulo, tal como se ha realizado en el apartado anterior. A continuación, se calculan las intensidades que toman cada una de las tres impedancias del receptor equivalente en triángulo, que están conectadas a las tensiones de línea. Sumando dichas intensidades, se obtienen las compuestas o de línea, que son las mismas que las que toma el receptor en estrella, puesto que ambos son equivalentes.

Tomando V_1 como origen de fases, las intensidades que absorben las impedancias del receptor equivalente en triángulo son:

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_{23}} = \frac{380 \angle 0^\circ}{76.06 \angle 26.57^\circ} = 5 \angle -26.57^\circ$$

$$\bar{J}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_{31}} = \frac{380 \angle 240^\circ}{76.06 \angle -26.57^\circ} = 5 \angle 266.57^\circ$$

$$\bar{J}_3 = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_{12}} = \frac{380 \angle 120^\circ}{56.66 \angle 0^\circ} = 6.71 \angle 120^\circ$$

Por Kirchhoff se verifica:

$$\bar{I}_1 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1$$

Por lo tanto, las intensidades compuestas valen:

$$\bar{I}_1 = 6.71 \angle 120^\circ - 5 \angle 266.57^\circ = -3.35 + j5.81 + 0.30 + j5 = -3.05 + j10.81 = 11.23 \angle 105.75^\circ$$

$$\bar{I}_2 = 5 \angle -26.57^\circ - 6.71 \angle 120^\circ = 4.47 - j2.23 + 3.35 - j5.81 = 7.82 - j8.04 = 11.21 \angle -45.79^\circ$$

$$\bar{I}_3 = 5 \angle 266.57^\circ - 5 \angle -26.57^\circ = -0.30 - j5 - 4.47 + j2.23 = -4.77 - j2.77 = 5.51 \angle -149.85^\circ$$

$$\bar{I}_1 = 11.23 \angle 105.75^\circ \qquad \bar{I}_2 = 11.21 \angle -45.79^\circ \qquad \bar{I}_3 = 5.51 \angle -149.85^\circ$$

c) Las tensiones existentes entre el centro de la estrella (punto neutro real) y cada uno de los hilos de la línea son las caídas de tensión en las impedancias conectadas en estrella, es decir, las tensiones simples reales, cuyos valores son:

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_1 = 11.23 \angle 105.75^\circ \cdot 22.36 \angle -26.57^\circ = 251.10 \angle 79.18^\circ$$

$$\bar{U}_2 = \bar{I}_2 \cdot \bar{Z}_2 = 11.21 \angle -45.79^\circ \cdot 22.36 \angle 26.57^\circ = 250.65 \angle -19.22^\circ$$

$$\bar{U}_3 = \bar{I}_3 \cdot \bar{Z}_3 = 5.51 \angle -149.85^\circ \cdot 30 \angle 0^\circ = 165.3 \angle -149.85^\circ$$

$$\bar{U}_1 = 251.10 \angle 79.18^\circ \qquad \bar{U}_2 = 250.65 \angle -19.22^\circ \qquad \bar{U}_3 = 165.3 \angle -149.85^\circ$$

d) Supongamos que dos vatímetros monofásicos se conectan con sus bobinas amperimétricas en serie con las fases 1 y 2. Sus lecturas serían, respectivamente, las partes reales de las siguientes expresiones:

$$\bar{S}_1 = P_1 + jQ_1 \qquad \bar{S}_2 = P_2 + jQ_2$$

siendo:

$$\bar{S}_1 = -\bar{V}_2 \cdot \bar{I}_1^* \qquad \bar{S}_2 = \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_2^* \qquad (2)$$

$\bar{I}_1^*$ e $\bar{I}_2^*$ son, respectivamente, los conjugados de los vectores $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$.

Así, según (2):

$$\bar{S}_1 = 380 \angle 60^\circ \cdot 11.23 \angle -105.75^\circ = 4267.4 \angle -45.75^\circ = 2977.75 - j3056.74$$

$$\bar{S}_2 = 380 \angle 0^\circ \cdot 11.21 \angle 45.79^\circ = 4259.8 \angle 45.79^\circ = 2970.31 + j3053.37$$

Por lo tanto, las lecturas de los dos vatímetros monofásicos conectados según el método de los dos vatímetros serían:

$$W_1 = 2977.75\,W \qquad W_2 = 2970.31\,W$$

e) Tal como se ha visto en el apartado anterior, las lecturas de dos vatímetros monofásicos de potencia reactiva conectados con sus bobinas amperimétricas en serie con las fases 1 y 2, serían, respectivamente, las partes imaginarias de las expresiones (2), es decir:

$$Q_1 = -3056.74\,VAr \qquad Q_2 = 3053.37\,VAr$$

Las dos lecturas tendrían que tener el mismo valor absoluto. La diferencia se debe a errores cometidos en las operaciones.

f) Las tres impedancias, al ser distintas, constituyen un receptor desequilibrado, por lo que las tensiones a que quedan conectadas no forman un sistema equilibrado, según se ha visto en los resultados del apartado c), a pesar de que las tensiones compuestas sí lo forman.

Existen, por lo tanto, dos sistemas de tensiones simples: las reales, que son las existentes en bornes de las impedancias, y las ficticias del sistema equilibrado directo, es decir, las que existirían en bornes de las impedancias si éstas fuesen iguales.

Al no coincidir ambos sistemas existe una diferencia de potencial entre sus orígenes, es decir, entre los puntos neutros real y ficticio.

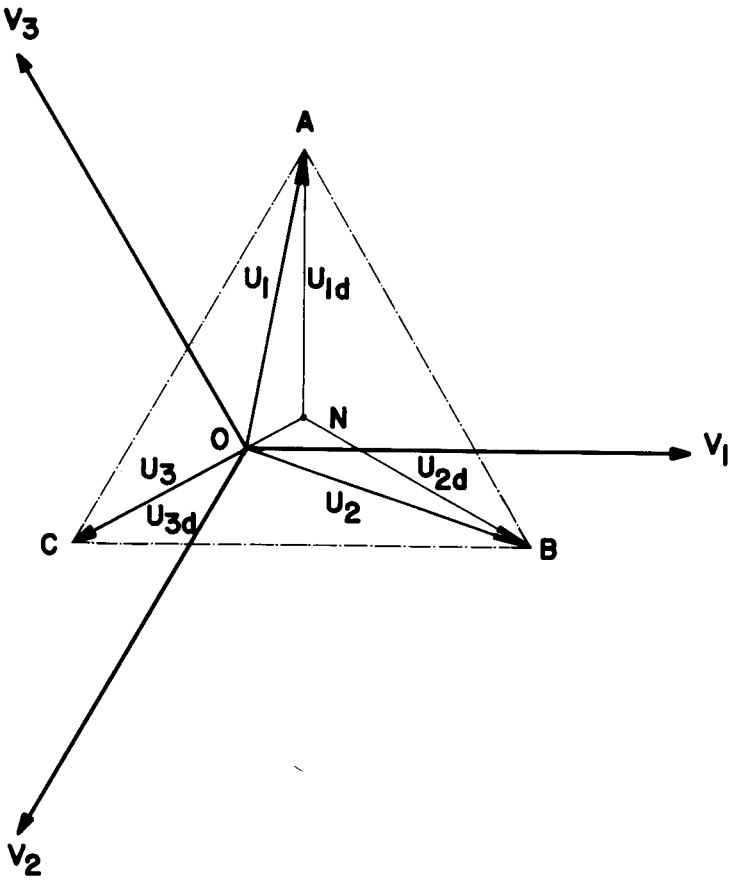
En la figura incluida en la página siguiente se representan los vectores de las tensiones compuestas y las tensiones simples reales y ficticias, donde se tiene:

$$\overline{0A} = \overline{0N} + \overline{NA} \qquad \overline{0B} = \overline{0N} + \overline{NB} \qquad \overline{0C} = \overline{0N} + \overline{NC}$$

o lo que es lo mismo:

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_0 + \overline{U}_{1d} \qquad \overline{U}_2 = \overline{U}_0 + \overline{U}_{2d} \qquad \overline{U}_3 = \overline{U}_0 + \overline{U}_{3d}$$

Se ha denominado U_0 a 0N, siendo ésta la tensión que existe entre 0 (punto neutro real) y N (punto neutro ficticio). Dicha tensión aparece debido al desequilibrio de las impedancias.



Por otra parte, se puede escribir:

$$\bar{I}_1 = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{U}_1 = \bar{\lambda}_1 \cdot (\bar{U}_0 + \bar{U}_{1d}) = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{U}_0 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{U}_{1d}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{U}_2 = \bar{\lambda}_2 \cdot (\bar{U}_0 + \bar{U}_{2d}) = \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{U}_0 + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{U}_{2d}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{U}_3 = \bar{\lambda}_3 \cdot (\bar{U}_0 + \bar{U}_{3d}) = \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{U}_0 + \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{U}_{3d}$$

Sumando miembro a miembro las tres igualdades anteriores se obtiene:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = (\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{U}_{1d} + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{U}_{2d} + \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{U}_{3d}) + \bar{U}_0 \cdot (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3) \quad (3)$$

Por el primer teorema de Kirchhoff se verifica:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \quad (4)$$

Por otra parte:

$$\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{U}_{1d} + \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{U}_{2d} + \bar{\lambda}_3 \cdot \bar{U}_{3d} = \bar{I}_0 \qquad (5)$$

siendo I_0 la intensidad que existiría en el neutro de un sistema trifásico a cuatro hilos si el punto 0 estuviera unido a él.

Sustituyendo (4) y (5) en (3) resulta:

$$0 = \bar{I}_0 + \bar{U}_0 \cdot (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3)$$

$$\bar{I}_0 = -\bar{U}_0 \cdot (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3)$$

por lo que el valor de la diferencia de potencia entre los dos puntos neutros es:

$$\bar{U}_0 = -\frac{\bar{I}_0}{(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3)}$$

Particularizando para los datos de este ejercicio:

$$\bar{U}_{1d} = 219.39 \angle 90^\circ \qquad \bar{U}_{2d} = 219.39 \angle 330^\circ \qquad \bar{U}_{3d} = 219.39 \angle 210^\circ$$

$$\bar{I}_0 = 4.47 \cdot 10^{-2} \angle 26.57^\circ \cdot 219.39 \angle 90^\circ + 4.47 \cdot 10^{-2} \angle -26.57^\circ \cdot 219.39 \angle 330^\circ + 3.33 \cdot 10^{-2} \angle 0^\circ \cdot 219.39 \angle 210$$

$$\bar{I}_0 = 6.10 \angle 210.31^\circ$$

Finalmente:

$$\bar{U}_0 = -\frac{6.10 \angle 210.31^\circ}{0.11 \angle 0^\circ} = 55.45 \angle 30.31^\circ$$

$$\bar{U}_0 = 55.45 \angle 30.31^\circ$$

PROBLEMA Nº 52

Resolver el problema anterior por el método gráfico.

Solución

En este problema se resuelven por el método gráfico los apartados b), c) y f) del ejercicio anterior. El resto de los apartados se resolverían de la misma manera en que se ha realizado en dicho ejercicio.

Para resolver el problema por el método gráfico, en primer lugar se calcula la intensidad I_0 que circularía por el hilo neutro si el punto 0 estuviera unido a él. El valor de dicha intensidad, calculado en el problema anterior, es:

$$\overline{I_0} = 6.10 \angle 210.31^o$$

A continuación se toma una tensión arbitraria U_{0f}, y se calcula la intensidad I_{0f} que tomarían las tres impedancias si estuviesen conectadas en paralelo a dicha tensión:

$$\overline{I_{0f}} = \overline{\lambda}_1 \cdot \overline{U}_{0f} + \overline{\lambda}_2 \cdot \overline{U}_{0f} + \overline{\lambda}_3 \cdot \overline{U}_{0f} = \overline{U}_{0f} \cdot (\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 + \overline{\lambda}_3)$$

Suponiendo U_{0f} = 100 V, dicha intensidad sería:

$$\overline{I_{0f}} = 100 \angle 0^o \cdot 0.11 \angle 0^o = 11 \angle 0^o$$

es decir, 11 A en fase con U_{0f}.

Se calcula U_0 en módulo y en fase para que la intensidad I_{0f} sea igual y opuesta a la intensidad en el neutro calculada anteriormente. Como se verifica:

$$I_{0f} = U_{0f} \cdot \lambda$$

$$I_0 = U_0 \cdot \lambda$$

resulta:

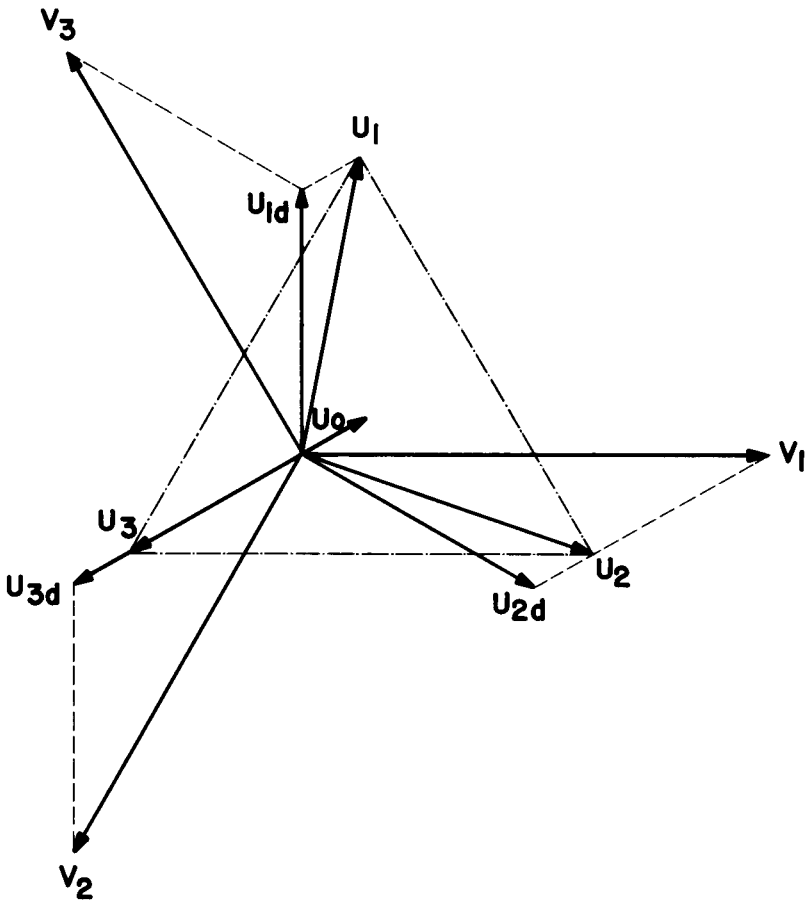
$$U_0 = \frac{U_{0f} \cdot I_0}{I_{0f}}$$

Particularizando para los datos del ejercicio:

$$U_0 = \frac{100 \cdot 6.10}{11} = 55.45 \text{ V}$$

Al formar I_0 un ángulo de 210.31º con el origen de fases, y estar U_{0f} e I_{0f} en fase, la intensidad I_{0f} formará un ángulo de 210.31º - 180º = 30.31º con el origen de fases y en consecuencia también lo formará U_0.

En el diagrama vectorial de tensiones simples y compuestas del sistema equilibrado directo, se sitúa el vector U_0.



A continuación se realizan gráficamente las sumas vectoriales:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_0 + \bar{U}_{1d} \qquad \bar{U}_2 = \bar{U}_0 + \bar{U}_{2d} \qquad \bar{U}_3 = \bar{U}_0 + \bar{U}_{3d} \tag{1}$$

obteniéndose sobre el diagrama a escala las siguientes lecturas:

$$U_1 = 4.1\,\text{cm} \cdot \frac{380\,\text{V}}{6.2\,\text{cm}} = 251\,\text{V}$$

$$U_2 = 4.1\,\text{cm} \cdot \frac{380\,\text{V}}{6.2\,\text{cm}} = 251\,\text{V}$$

$$U_3 = 2.7\,\text{cm} \cdot \frac{380\,\text{V}}{6.2\,\text{cm}} = 165\,\text{V}$$

Finalmente, las intensidades en las impedancias conectadas en estrella se calculan mediante las siguientes relaciones:

$$\bar{I}_1 = \bar{U}_1 \cdot \bar{\lambda}_1 \qquad \bar{I}_2 = \bar{U}_2 \cdot \bar{\lambda}_2 \qquad \bar{I}_3 = \bar{U}_3 \cdot \bar{\lambda}_3 \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2) resulta:

$$\bar{I}_1 = \bar{U}_{1d} \cdot \bar{\lambda}_1 + \bar{U}_0 \cdot \bar{\lambda}_1$$

$$\bar{I}_2 = \bar{U}_{2d} \cdot \bar{\lambda}_2 + \bar{U}_0 \cdot \bar{\lambda}_2$$

$$\bar{I}_3 = \bar{U}_{3d} \cdot \bar{\lambda}_3 + \bar{U}_0 \cdot \bar{\lambda}_3$$

Y particularizando para los datos del ejercicio:

$$\bar{I}_1 = 219.39\,\underline{|\,90^\circ} \cdot 4.47 \cdot 10^{-2}\,\underline{|\,26.57^\circ} + 55.45\,\underline{|\,30.31^\circ} \cdot 4.47 \cdot 10^{-2}\,\underline{|\,26.57^\circ} = 11.26\,\underline{|\,105.65^\circ}$$

$$\bar{I}_2 = 219.39\,\underline{|\,330^\circ} \cdot 4.47 \cdot 10^{-2}\,\underline{|\,-26.57^\circ} + 55.45\,\underline{|\,30.31^\circ} \cdot 4.47 \cdot 10^{-2}\,\underline{|\,-26.57^\circ} = 11.23\,\underline{|\,314.45^\circ}$$

$$\bar{I}_3 = 219.39\,\underline{|\,210^\circ} \cdot 3.33 \cdot 10^{-2}\,\underline{|\,0^\circ} + 55.45\,\underline{|\,30.31^\circ} \cdot 3.33 \cdot 10^{-2}\,\underline{|\,0^\circ} = 5.46\,\underline{|\,210^\circ}$$

Los resultados difieren ligeramente de los obtenidos en el problema anterior debido a errores cometidos en las operaciones.

PROBLEMA Nº 53

Sea un sistema desequilibrado trifásico, de tensiones simples:

$$\overline{U}_1 = 3\angle 0^\circ \qquad \overline{U}_2 = 4\angle 270^\circ \qquad \overline{U}_3 = 5\angle 180^\circ$$

Calcular sus componentes simétricas.

Solución

Existen tres sistemas trifásicos simétricos:

1) Los sistemas homopolares, que tienen tres vectores equipolentes:

$$\overline{U}_{10} = \overline{U}_0 \qquad \overline{U}_{20} = \overline{U}_0 \qquad \overline{U}_{30} = \overline{U}_0$$

2) Los sistemas equilibrados directos:

$$\overline{U}_{1d} = \overline{U}_d \qquad \overline{U}_{2d} = \overline{U}_d \cdot \overline{A}^2 \qquad \overline{U}_{3d} = \overline{U}_d \cdot \overline{A}$$

3) Los sistemas equilibrados inversos:

$$\overline{U}_{1i} = \overline{U}_i \qquad \overline{U}_{2i} = \overline{U}_i \cdot \overline{A} \qquad \overline{U}_{3i} = \overline{U}_i \cdot \overline{A}^2$$

Cualquier sistema trifásico se puede descomponer en la suma de estos tres sistemas simétricos.

A los valores U_0, U_d y U_i, se les denomina componentes simétricas de las tensiones U_1, U_2 y U_3.

Los valores de las componentes simétricas en función de las tensiones simples son:

$$\overline{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot \left(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3\right)$$

$$\overline{U}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 \cdot \overline{A} + \overline{U}_3 \cdot \overline{A}^2\right)$$

$$\overline{U}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 \cdot \overline{A}^2 + \overline{U}_3 \cdot \overline{A}\right)$$

Por lo tanto, en este caso las componentes simétricas son:

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot (3 - j4 - 5) = 1.49 \angle 243.43^\circ$$

$$\bar{U}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(3 - j4 \cdot \left(-0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5 \cdot \left(-0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 3.64 \angle 35.39^\circ$$

$$\bar{U}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(3 - j4 \cdot \left(-0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5 \cdot \left(-0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1.03 \angle 311.08^\circ$$

$$\bar{U}_0 = 1.49 \angle 243.43^\circ \qquad \bar{U}_d = 3.64 \angle 35.39^\circ \qquad \bar{U}_i = 1.03 \angle 311.08^\circ$$

PROBLEMA Nº 54

Para determinar la influencia de una carga monofásica sobre una red trifásica a tres hilos, se han obtenido las siguientes lecturas:

$$V_1 = 100\ V \qquad V_2 = 110\ V \qquad V_3 = 130\ V$$

Determinar:

a) las componentes simétricas de las tensiones simples de una forma gráfica, razonando claramente la construcción.
b) el grado de asimetría de la red.

Solución

a) En un circuito trifásico con sistema directo se verifica:

$$\overline{V}_d = -\sqrt{3} \cdot \overline{U}_d \cdot j \tag{1}$$

También:

$$\overline{A}^2 - \overline{A} = 1\angle 240^o - 1\angle 120^o = -0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\, j \tag{2}$$

Por lo tanto, sustituyendo (2) en (1) resulta:

$$\overline{V}_d = \overline{U}_d \cdot \left(\overline{A}^2 - \overline{A}\right) \tag{3}$$

La componente directa de las tensiones compuestas, en función de dichas tensiones es:

$$3 \cdot \overline{V}_d = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 \cdot \overline{A} + \overline{V}_3 \cdot \overline{A}^2 \tag{4}$$

También se verifica:

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = 0$$

$$\overline{V}_3 = -\left(\overline{V}_1 + \overline{V}_2\right) \tag{5}$$

Sustituyendo (5) en (4) resulta:

$$3 \cdot \overline{V}_d = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 \cdot \overline{A} - \left(\overline{V}_1 + \overline{V}_2\right) \cdot \overline{A}^2$$

$$3 \cdot \overline{V}_d = \overline{V}_1 \cdot \left(1 - \overline{A}^2\right) - \overline{V}_2 \cdot \left(\overline{A}^2 - \overline{A}\right)$$

$$3 \cdot \overline{V}_d = \overline{V}_1 \cdot \overline{A} \cdot \left(\frac{1}{\overline{A}} - \frac{\overline{A}^2}{\overline{A}}\right) - \overline{V}_2 \cdot \left(\overline{A}^2 - \overline{A}\right)$$

$$3 \cdot \overline{V}_d = \left(\overline{A}^2 - \overline{A}\right) \cdot \left(\overline{V}_1 \cdot \overline{A} - \overline{V}_2\right) \tag{6}$$

Y finalmente sustituyendo (3) en (6):

$$3 \cdot \overline{U}_d = \overline{V}_1 \cdot \overline{A} - \overline{V}_2 \tag{7}$$

Análogamente, en un circuito trifásico con sistema inverso se verifica:

$$\overline{V}_i = \sqrt{3} \cdot \overline{U}_i \cdot j \tag{8}$$

También:

$$\overline{A} - \overline{A}^2 = \sqrt{3}\, j \tag{9}$$

Por lo tanto, sustituyendo (9) en (8) resulta:

$$\overline{V}_i = \overline{U}_i \cdot \left(\overline{A} - \overline{A}^2\right) \tag{10}$$

La componente inversa de las tensiones compuestas, en función de dichas tensiones es:

$$3 \cdot \overline{V}_i = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 \cdot \overline{A}^2 + \overline{V}_3 \cdot \overline{A} \tag{11}$$

También se verifica:

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = 0$$

$$\overline{V}_3 = -\left(\overline{V}_1 + \overline{V}_2\right) \tag{5}$$

Sustituyendo (5) en (11) resulta:

$$3 \cdot \overline{V}_i = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 \cdot \overline{A}^2 - \left(\overline{V}_1 + \overline{V}_2\right) \cdot \overline{A}$$

$$3 \cdot \overline{V}_i = \overline{V}_1 \cdot \left(1 - \overline{A}\right) - \overline{V}_2 \cdot \left(\overline{A} - \overline{A}^2\right)$$

$$3 \cdot \overline{V}_i = \overline{V}_1 \cdot \overline{A}^2 \cdot \left(\frac{1}{\overline{A}^2} - \frac{\overline{A}}{\overline{A}^2}\right) - \overline{V}_2 \cdot \left(\overline{A} - \overline{A}^2\right)$$

$$3 \cdot \overline{V}_i = \left(\overline{A} - \overline{A}^2\right) \cdot \left(\overline{V}_1 \cdot \overline{A}^2 - \overline{V}_2\right) \tag{12}$$

Y finalmente sustituyendo (10) en (12):

$$3 \cdot \overline{U}_i = \overline{V}_1 \cdot \overline{A}^2 - \overline{V}_2 \qquad (13)$$

Mediante las expresiones (7) y (13), correspondientes a las componentes directa e inversa de las tensiones simples reales (que en este problema se desconocen), es posible obtener su valor de forma gráfica procediendo como se expone a continuación.

Se representan en un diagrama vectorial las tensiones simples reales, y por composición de las mismas se obtienen las tensiones compuestas (cuyos valores eficaces son datos del problema).

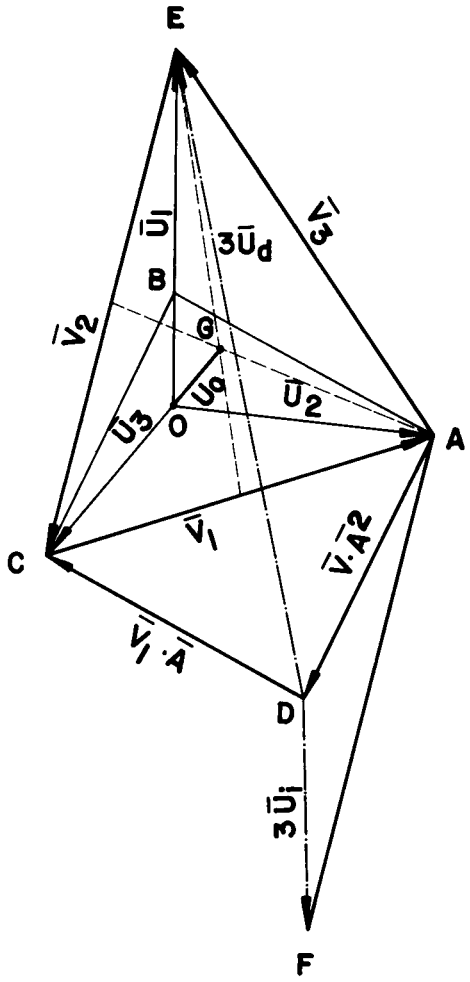
Construyendo un triángulo equilátero de base V_1, se determinan gráficamente los valores de $\overline{V}_1 \cdot \overline{A}$ y $\overline{V}_1 \cdot \overline{A}^2$.

Restando V_2 de los dos valores anteriores, se obtienen tres veces las componentes directa e inversa, respectivamente.

Los triángulos ADC y ABC son equiláteros, y tienen como base CA = V_1. En la figura se tiene que:

$$\overline{AD} = \overline{V}_1 \cdot \overline{A}^2 \qquad \overline{DC} = \overline{V}_1 \cdot \overline{A}$$

$$\overline{DE} = 3 \cdot \overline{U}_d \qquad \overline{DF} = 3 \cdot \overline{U}_i$$



Si el sistema de tensiones compuestas fuese equilibrado directo, el punto D coincidiría con el F y, en consecuencia, la componente inversa U_i sería cero.

La componente homopolar U_0 se determina de la siguiente manera.

Teniendo en cuenta que G es el centro de gravedad del triángulo de tensiones compuestas AEC, se verifica:

$$\overline{GA} + \overline{GC} + \overline{GE} = 0 \qquad (14)$$

Ahora bien, 0 es el centro de la estrella de las tensiones simples U_1, U_2 y U_3, que no coincide con G salvo en el caso en que el sistema de tensiones compuestas sea equilibrado. Por lo tanto, se cumple:

$$\overline{0A} = \overline{0G} + \overline{GA}$$

$$\overline{0C} = \overline{0G} + \overline{GC}$$

$$\overline{0E} = \overline{0G} + \overline{GE}$$

Sumando las tres igualdades anteriores miembro a miembro, y teniendo en cuenta la igualdad (14), resulta:

$$\overline{0A} + \overline{0C} + \overline{0E} = 3 \cdot \overline{0G}$$

Por otro lado, se sabe que la componente homopolar de las tensiones simples, en función del valor de éstas es:

$$\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 = 3 \cdot \overline{U}_0$$

Por lo tanto:

$$0G = U_0$$

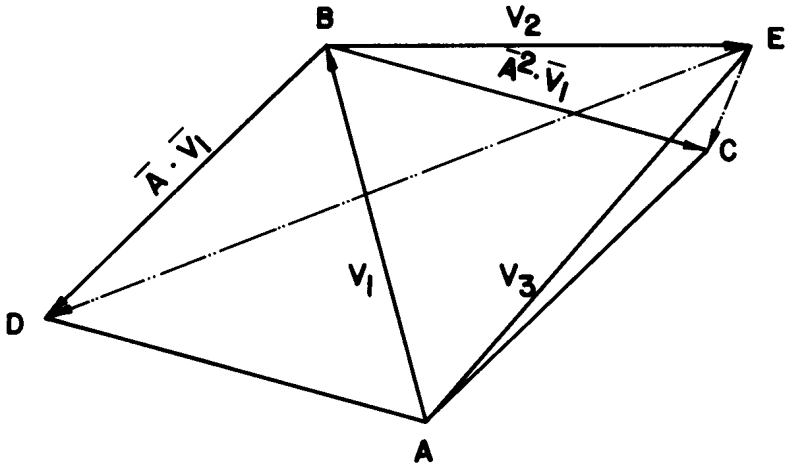
Es decir, 0G representa la componente homopolar de la tensión.

Desde el punto de vista práctico, la construcción gráfica de las componentes simétricas de las tensiones simples se realiza como se expone a continuación.

Se construye el triángulo de tensiones compuestas, y, tomando como base V_1, se construyen dos triángulos equiláteros, que determinan $V_1 \cdot A$ y $V_1 \cdot A^2$.

Restando V_2 de los dos valores anteriores se calculan $3 \cdot U_d$ y $3 \cdot U_i$.

De los dos triángulos equiláteros construidos, al triángulo ABD se le denomina directo, y al ABC inverso.



En la figura se deduce que:

$$ED = 3 \cdot U_d \qquad EC = 3 \cdot U_i$$

Teniendo en cuenta que se ha tomado la escala 100 V = 5 cm:

$$ED = 9.8\,\text{cm} \cdot \frac{100\,\text{V}}{5\,\text{cm}} = 196\,\text{V} = 3 \cdot U_d \quad \Rightarrow \quad U_d = 65.33\,\text{V}$$

$$EC = 1.5\,\text{cm} \cdot \frac{100\,\text{V}}{5\,\text{cm}} = 30\,\text{V} = 3 \cdot U_i \quad \Rightarrow \quad U_i = 10\,\text{V}$$

Según se desprende de lo dicho, todo sistema de vectores U_1, U_2 y U_3, cuyo origen sea un punto cualquiera dentro del triángulo ABE, y cuyos extremos coincidan con los vértices A, B y E, tienen la misma componente directa e inversa; por lo tanto, sólo difieren en la componente homopolar.

En este caso, al no conocer el punto 0, no es posible determinar la componente homopolar U_0.

b) El desequilibrio en tensión se caracteriza por:

$$e_1 = \frac{U_i}{U_d} = \frac{10}{65.33} = 0.153$$

PROBLEMA Nº 55

En una red trifásica de cuatro hilos, las tensiones simples tienen las siguientes expresiones complejas:

$$\overline{U}_1 = 127 \left| \underline{0^o} \right. \qquad \overline{U}_2 = 122.38 \left| \underline{101.31^o} \right. \qquad \overline{U}_3 = 114.84 \left| \underline{106.67^o} \right.$$

Calcular las componentes simétricas:

a) analíticamente.

b) gráficamente.

Solución

a) Las componentes simétricas son:

- U_0: homopolar.
- U_d: directa.
- U_i: inversa.

y vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\overline{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot \left(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 \right)$$

$$\overline{U}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 \cdot \overline{A} + \overline{U}_3 \cdot \overline{A}^2 \right)$$

$$\overline{U}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 \cdot \overline{A}^2 + \overline{U}_3 \cdot \overline{A} \right)$$

Sustituyendo los valores del enunciado:

$$\overline{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot \left(127 \left| \underline{0^o} + 122.38 \right| \underline{101.31^o} + 114.84 \left| \underline{106.67^o} \right. \right) = 80.14 \left| \underline{73.07^o} \right.$$

$$\overline{U}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(127 \left| \underline{0^o} + 122.38 \right| \underline{101.31^o} \cdot 1 \left| \underline{120^o} + 114.84 \right| \underline{106.67^o} \cdot 1 \left| \underline{240^o} \right. \right) = 60.61 \left| \underline{323.85^o} \right.$$

$$\overline{U}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(127 \left| \underline{0^o} + 122.38 \right| \underline{101.31^o} \cdot 1 \left| \underline{240^o} + 114.84 \right| \underline{106.67^o} \cdot 1 \left| \underline{120^o} \right. \right) = 68.32 \left| \underline{323.20^o} \right.$$

$$\overline{U}_0 = 80.14 \left| \underline{73.07^o} \right. \qquad \overline{U}_d = 60.61 \left| \underline{323.85^o} \right. \qquad \overline{U}_i = 68.32 \left| \underline{323.20^o} \right.$$

b) Para realizar el cálculo de forma gráfica, se procede teniendo en cuenta lo expuesto en el problema anterior.

Las expresiones que se emplean para la determinación de las componentes directa e inversa son:

$$3 \cdot \overline{U}_d = \overline{V}_1 \cdot \overline{A} - \overline{V}_2$$

$$3 \cdot \overline{U}_i = \overline{V}_1 \cdot \overline{A}^2 - \overline{V}_2$$

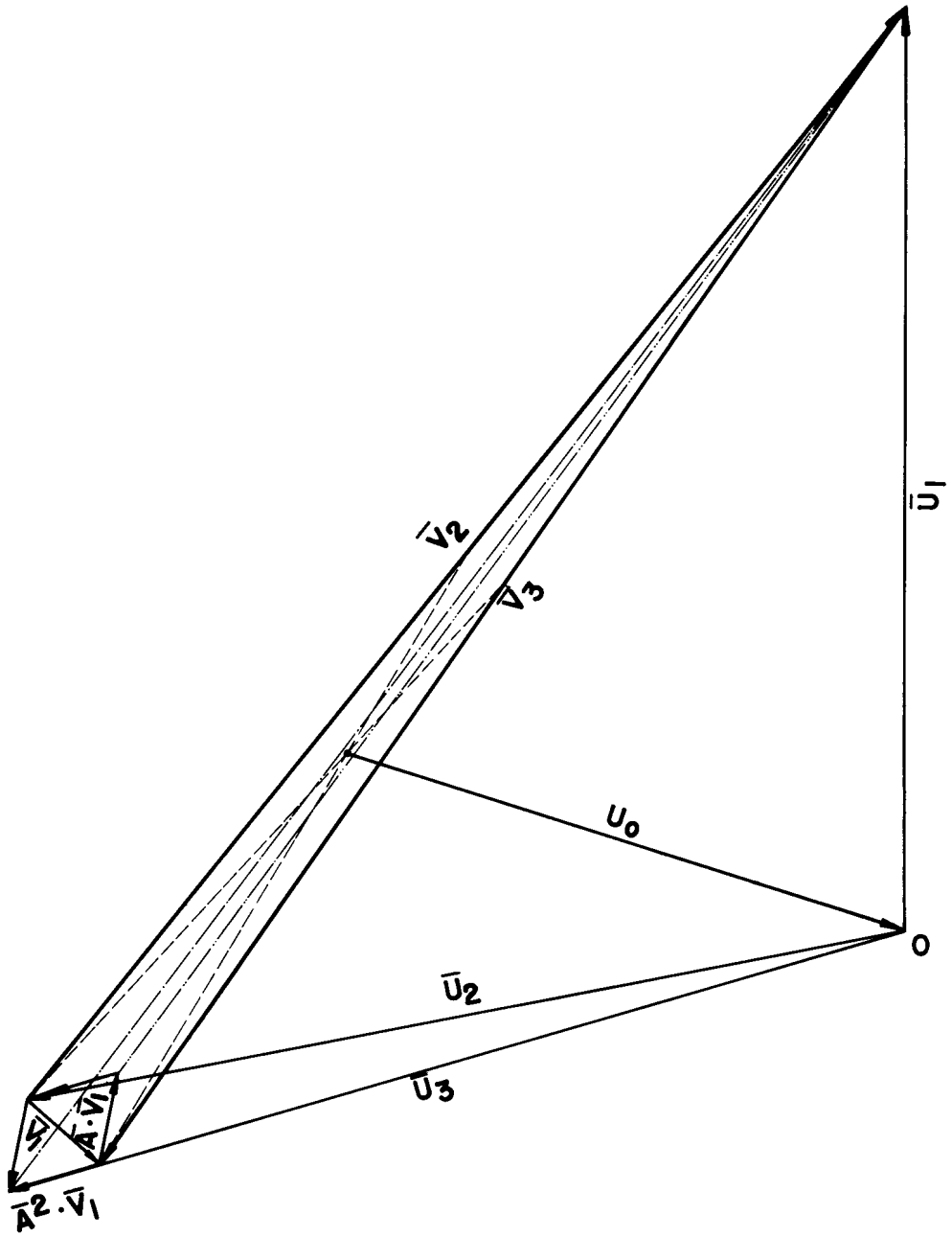
El gráfico se ha realizado a escala 1:10, y sobre él se obtienen las siguientes lecturas:

$$U_i = \frac{205}{3} = 68.33\,V$$

$$U_d = \frac{182}{3} = 60.67\,V$$

Para la componente homopolar:

$$G0 = U_0 = 80.1\,V$$


$\bar{V}_2$
$\bar{V}_3$
$\bar{U}_1$
U_0
0
$\bar{U}_2$
$\bar{U}_3$
$\bar{V}_1$
$\bar{A}\cdot\bar{V}_1$
$\bar{A}^2\cdot\bar{V}_1$

PROBLEMA Nº 56

Sea una red trifásica, con tensión de línea 220 V y frecuencia 50 Hz, y cuyo orden de sucesión de fases es 1, 2, 3, directo. A esta red se conectan en paralelo los siguientes receptores:

A) motor asíncrono trifásico, de las siguientes características:
   - potencia: 2000 W
   - factor de potencia: 0.8.

B) tres condensadores idénticos, de capacidad 200 μF, conectados en estrella.

Suponiendo que el hilo 3 que alimenta el equipo de condensadores se rompe, calcular:

a) intensidad en cada hilo de la línea.

b) componentes simétricas de estas intensidades.

Solución

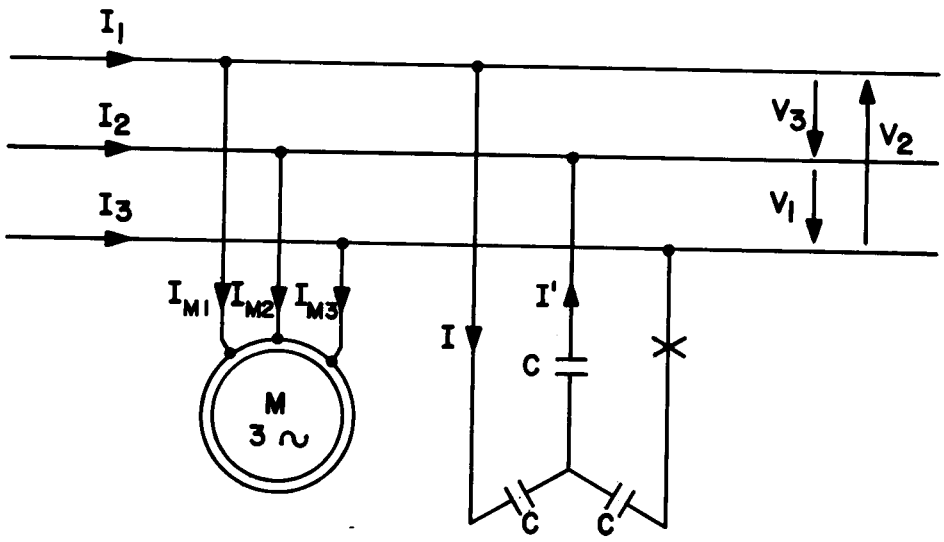
a) Al romperse el conductor que une la fase 3 con el equipo de condensadores, quedan dos condensadores conectados en serie a la tensión V_3, siendo su capacidad equivalente C', de valor:

$$C' = \frac{C}{2} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

El esquema eléctrico correspondiente se muestra en la página siguiente.

Las intensidades que suministra la línea al conjunto de receptores, en función de las que éstos toman de la línea son:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \overline{I_{M1}} + \bar{I}' \\ \bar{I}_2 &= \overline{I_{M2}} - \bar{I}' \\ \bar{I}_3 &= \overline{I_{M3}} \end{aligned} \qquad (1)$$



El valor eficaz de la intensidad que toma el motor trifásico es:

$$I_M = \frac{2000}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.8} = 6.56 \text{ A}$$

Tomando V_1 como origen de fases, las expresiones complejas de las tensiones de línea y de las tensiones simples correspondientes al sistema equilibrado directo, son:

$$\overline{V}_1 = 220 \angle 0^\circ \qquad \overline{V}_2 = 220 \angle 240^\circ \qquad \overline{V}_3 = 220 \angle 120^\circ$$

$$\overline{U}_1 = 127 \angle 90^\circ \qquad \overline{U}_2 = 127 \angle 330^\circ \qquad \overline{U}_3 = 127 \angle 210^\circ$$

En consecuencia, las expresiones complejas de las intensidades que toma el motor de la línea, teniendo en cuenta que se encuentran retrasadas φ = arc cos 0.8 = 36.87º respecto de las tensiones simples, son:

$$\overline{I_{M1}} = 6.56 \angle 53.13^\circ \qquad \overline{I_{M2}} = 6.56 \angle 293.13^\circ \qquad \overline{I_{M3}} = 6.56 \angle 173.13^\circ$$

Respecto a la intensidad que toman de la línea los dos condensadores en serie:

$$\overline{I}' = \frac{\overline{V}_3}{\overline{X}_C}$$

siendo:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C'} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 31.83 \ \Omega$$

$$\bar{X}_C = 31.83 \angle -90^\circ$$

Por lo tanto:

$$\bar{I}' = \frac{220 \angle 120^\circ}{31.83 \angle -90^\circ} = 6.91 \angle 210^\circ$$

Finalmente, según (1), los valores de las intensidades que la línea suministra al conjunto de receptores son:

$$\bar{I}_1 = 6.56 \angle 53.13^\circ + 6.91 \angle 210^\circ = 2.71 \angle 138.73^\circ$$

$$\bar{I}_2 = 6.56 \angle 293.13^\circ - 6.91 \angle 210^\circ = 8.94 \angle 343.29^\circ$$

$$\bar{I}_3 = 6.56 \angle 173.13^\circ$$

$$\bar{I}_1 = 2.71 \angle 138.73^\circ \qquad \bar{I}_2 = 8.94 \angle 343.29^\circ \qquad \bar{I}_3 = 6.56 \angle 173.13^\circ$$

b) Las componentes simétricas de las intensidades de línea vienen dadas por las siguientes expresiones, análogas a las obtenidas para las tensiones:

$$\bar{I}_0 = \frac{1}{3} \cdot \left(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3\right)$$

$$\bar{I}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 \cdot \bar{A} + \bar{I}_3 \cdot \bar{A}^2\right)$$

$$\bar{I}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 \cdot \bar{A}^2 + \bar{I}_3 \cdot \bar{A}\right)$$

En un circuito trifilar, como es el del problema, se verifica:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

Por lo tanto, la componente homopolar, I_0, es nula.

En cuanto a los valores de las componentes directa e inversa, sustituyendo los valores del enunciado, son:

$$\bar{I}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(2.71 \left| \underline{138.73^o} + 8.94 \right| \underline{343.29^o} \cdot 1 \left| \underline{120^o} + 6.56 \right| \underline{173.13^o} \cdot 1 \left| \underline{240^o} \right. \right) = 2.96 \left| \underline{75.78^o} \right.$$

$$\bar{I}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(2.71 \left| \underline{138.73^o} + 8.94 \right| \underline{343.29^o} \cdot 1 \left| \underline{240^o} + 6.56 \right| \underline{173.13^o} \cdot 1 \left| \underline{120^o} \right. \right) = 3.99 \left| \underline{240.07^o} \right.$$

$$\bar{I}_d = 2.96 \left| \underline{75.78^o} \right. \qquad \bar{I}_i = 3.99 \left| \underline{240.07^o} \right.$$

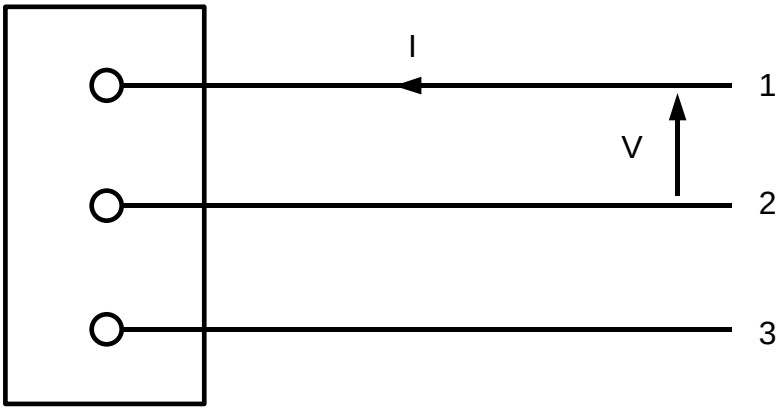
PROBLEMA Nº 57

Sea un receptor trifásico caracterizado por sus impedancias directa e inversa, que se alimenta mediante una tensión alterna monofásica, entre los bornes 1 y 2.

Se pide calcular la intensidad que absorbe el receptor en función de la tensión monofásica aplicada y de las impedancias directa e inversa.

Solución

El esquema correspondiente es:



Suponiendo que se conectara el receptor trifásico a una línea trifásica con tensiones de línea V_1, V_2 y V_3, aparecerían entre los bornes 1, 2 y 3 y el punto neutro real unas tensiones simples U_1, U_2 y U_3, cuyas componentes simétricas serían U_0, U_d y U_i.

En esas condiciones, el receptor absorbería unas intensidades I_1, I_2 e I_3, con componentes simétricas I_0, I_d e I_i.

Las ecuaciones simétricas son:

$$\bar{U}_d = \bar{I}_d \cdot \bar{Z}_d \qquad (1)$$

$$\bar{U}_i = \bar{I}_i \cdot \bar{Z}_i \qquad (2)$$
$$\bar{U}_0 = \bar{I}_0 \cdot \bar{Z}_0$$

Las ecuaciones asimétricas, cuando se encuentra sometido a la tensión monofásica U entre los bornes 1 y 2, son:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 - \bar{U}_2 \qquad (3)$$
$$\bar{I}_1 = -\bar{I}_2$$
$$\bar{I}_3 = 0$$

Las relaciones que definen las componentes simétricas de las intensidades son:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}_d + \bar{I}_i \qquad (4)$$
$$\bar{I}_2 = \bar{I}_0 + \bar{I}_d \cdot \bar{A}^2 + \bar{I}_i \cdot \bar{A} \qquad (5)$$
$$\bar{I}_3 = \bar{I}_0 + \bar{I}_d \cdot \bar{A} + \bar{I}_i \cdot \bar{A}^2$$

Teniendo en cuenta que es un receptor a tres hilos, se verifica:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 3 \cdot \bar{I}_0 = 0$$

Por lo tanto, la componente homopolar de las intensidades de línea, I_0, es nula; y las ecuaciones (4) y (5) de las intensidades en función de sus componentes simétricas se reducen a:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_d + \bar{I}_i \qquad (6)$$
$$\bar{I}_2 = \bar{I}_d \cdot \bar{A}^2 + \bar{I}_i \cdot \bar{A} \qquad (7)$$

Y haciendo:

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \qquad \bar{I}_2 = -\bar{I}$$

las expresiones (6) y (7) resultan:

$$\bar{I} = \bar{I}_d + \bar{I}_i$$
$$\bar{I} = -\bar{I}_d \cdot \bar{A}^2 - \bar{I}_i \cdot \bar{A}$$

Operando:

$$\bar{I}_d = \frac{\bar{I}}{1 - \bar{A}^2} \qquad (8)$$
$$\bar{I}_i = \frac{\bar{I}}{1 - \bar{A}} \qquad (9)$$

La componente homopolar de las tensiones simples, U_0, es nula, ya que $\bar{U}_0 = \bar{I}_0 \cdot \bar{Z}_0$ e $\bar{I}_0 = 0$. Por lo tanto, las relaciones que definen las componentes simétricas de las tensiones simples son:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_d + \bar{U}_i \tag{10}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_d \cdot \bar{A}^2 + \bar{U}_i \cdot \bar{A} \tag{11}$$

Sustituyendo (10) y (11) en (3), resulta:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 - \bar{U}_2 = \bar{U}_d + \bar{U}_i - \left(\bar{U}_d \cdot \bar{A}^2 + \bar{U}_i \cdot \bar{A}\right) = \bar{U}_d \cdot \left(1 - \bar{A}^2\right) + \bar{U}_i \cdot (1 - \bar{A})$$

Y teniendo en cuenta (1) y (2), la expresión anterior queda:

$$\bar{U} = \bar{I}_d \cdot \bar{Z}_d \cdot \left(1 - \bar{A}^2\right) + \bar{I}_i \cdot \bar{Z}_i \cdot (1 - \bar{A}) \tag{12}$$

Sustituyendo (8) y (9) en (12), resulta:

$$\bar{U} = \frac{\bar{I}}{1 - \bar{A}^2} \cdot \bar{Z}_d \cdot \left(1 - \bar{A}^2\right) + \frac{\bar{I}}{1 - \bar{A}} \cdot \bar{Z}_i \cdot (1 - \bar{A})$$

Finalmente, despejando $\bar{I}$ de la expresión anterior, se obtiene el valor pedido:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_d + \bar{Z}_i}$$

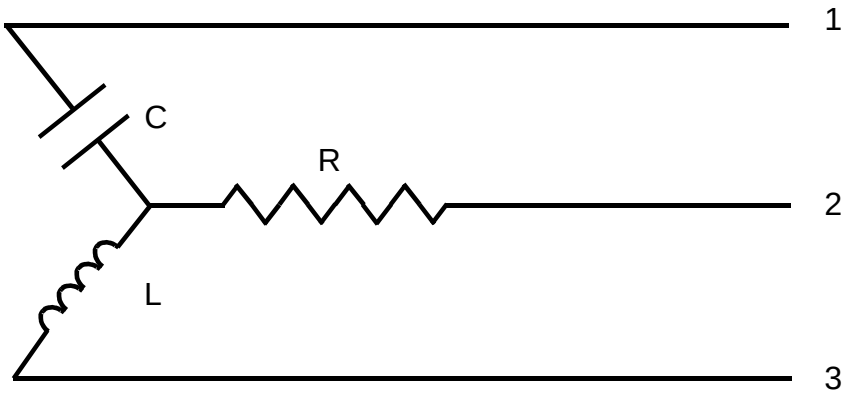
PROBLEMA Nº 58

A una línea trifásica equilibrada con tensión de línea 173.2 V, y cuyo orden de sucesión de fases es 1, 2 y 3, se conecta un receptor en estrella, tal como aparece en la figura. Las características del receptor son:

$$X_L = X_C = R = 10\ \Omega$$

Se pide:

a) tensiones a que quedan sometidos los receptores L, C y R.
b) componentes simétricas de las anteriores tensiones.
c) intensidades que circulan por cada rama de la estrella.
d) componentes simétricas de dichas intensidades.
e) desequilibrio en tensión y desequilibrio en intensidad.



Solución

a) Las expresiones complejas de las tres impedancias son:

$$\bar{Z}_1 = 10\,\underline{|\,-90^o} \qquad \bar{Z}_2 = 10\,\underline{|\,0^o} \qquad \bar{Z}_3 = 10\,\underline{|\,90^o}$$

Si el neutro de la estrella se hubiese unido al neutro de la red, las impedancias habrían quedado conectadas a las tensiones simples equilibradas directas, de valor eficaz:

$$U = \frac{173.2}{\sqrt{3}} = 100\ V$$

cuyo sistema, tomando V_1 como origen de fases, sería:

$$\bar{U}_{1d} = \bar{U}_d = 100 \left| \underline{90^o} \right.$$

$$\bar{U}_{2d} = \bar{A}^2 \cdot \bar{U}_d = 100 \left| \underline{330^o} \right.$$

$$\bar{U}_{3d} = \bar{A} \cdot \bar{U}_d = 100 \left| \underline{210^o} \right.$$

En estas condiciones, las intensidades que tomaría el receptor trifásico de cada hilo de la línea valdrían:

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{U}_{1d}}{\bar{Z}_1} = \frac{100 \left| \underline{90^o} \right.}{10 \left| \underline{-90^o} \right.} = 10 \left| \underline{180^o} \right.$$

$$\bar{J}_2 = \frac{\bar{U}_{2d}}{\bar{Z}_2} = \frac{100 \left| \underline{330^o} \right.}{10 \left| \underline{0^o} \right.} = 10 \left| \underline{330^o} \right.$$

$$\bar{J}_3 = \frac{\bar{U}_{3d}}{\bar{Z}_3} = \frac{100 \left| \underline{210^o} \right.}{10 \left| \underline{90^o} \right.} = 10 \left| \underline{120^o} \right.$$

La corriente en el neutro sería:

$$\bar{I}_0 = \bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \bar{J}_3$$

de valor:

$$\bar{I}_0 = 10 \left| \underline{180^o} + 10 \right| \underline{330^o} + 10 \left| \underline{120^o} = 7.32 \right| \underline{150^o}$$

Para anular esta intensidad habría que aplicar entre los bornes en paralelo de la estrella y su centro, una tensión U_0, cuyo valor, según se dedujo en el problema nº 51, viene dado por la expresión:

$$\bar{U}_0 = - \left(\frac{\bar{I}_0}{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3} \right) \qquad (1)$$

siendo $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ y $\bar{\lambda}_3$, las admitancias de las impedancias del receptor en estrella. En este caso:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{10} \left| \underline{90^o} \right.$$

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{10} \left| \underline{0^o} \right.$$

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{1}{10} \left| \underline{-90^o} \right.$$

La suma de las tres admitancias es:

$$\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 = \frac{1}{10} \left| \underline{0^o} \right.$$

Por lo tanto, según (1):

$$\overline{U}_0 = \frac{7.32 \angle -30^o}{\frac{1}{10} \angle 0^o} = 73.2 \angle -30^o$$

Según las expresiones deducidas en el problema nº 51, las tensiones simples reales, es decir, las verdaderas tensiones que existen en bornes de los receptores conectados en estrella, según la conexión que figura en el enunciado, son:

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_0 + \overline{U}_{1d} \qquad \overline{U}_2 = \overline{U}_0 + \overline{U}_{2d} \qquad \overline{U}_3 = \overline{U}_0 + \overline{U}_{3d}$$

Por lo que resulta:

$$\overline{U}_1 = 73.2 \angle -30^o + 100 \angle 90^o = 89.66 \angle 45^o$$

$$\overline{U}_2 = 73.2 \angle -30^o + 100 \angle 330^o = 173.20 \angle -30^o$$

$$\overline{U}_3 = 73.2 \angle -30^o + 100 \angle 210^o = 89.66 \angle -105^o$$

$$\overline{U}_1 = 89.66 \angle 45^o \qquad \overline{U}_2 = 173.20 \angle -30^o \qquad \overline{U}_3 = 89.66 \angle -105^o$$

b) Las componentes simétricas de las tensiones simples anteriores vienen definidas por las siguientes expresiones, deducidas en el problema nº 53:

$$\overline{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot \left(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 \right)$$

$$\overline{U}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 \cdot \overline{A} + \overline{U}_3 \cdot \overline{A}^2 \right)$$

$$\overline{U}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 \cdot \overline{A}^2 + \overline{U}_3 \cdot \overline{A} \right)$$

Particularizando para los datos del problema:

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot \left(89.66 \angle -45^\circ + 173.20 \angle -30^\circ + 89.66 \angle -105^\circ\right) = 73.20 \angle -30^\circ$$

$$\bar{U}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(89.66 \angle -45^\circ + 173.20 \angle -30^\circ \cdot 1 \angle 120^\circ + 89.66 \angle -105^\circ \cdot 1 \angle 240^\circ\right) = 100 \angle 90^\circ$$

Respecto a la componente inversa, por ser un sistema de tensiones compuestas equilibrado, su valor es nulo. Según se dedujo en el problema nº 54:

$$3 \cdot \bar{U}_i = \bar{V}_1 \cdot \bar{A}^2 - \bar{V}_2$$

que evidentemente es cero.

Por consiguiente:

$$\bar{U}_0 = 73.20 \angle -30^\circ \qquad \bar{U}_d = 100 \angle 90^\circ$$

El valor de la componente directa también se podría haber hallado, según se vió en el problema nº 54, por la expresión siguiente:

$$3 \cdot \bar{U}_d = \bar{V}_1 \cdot \bar{A} - \bar{V}_2$$

cuyo valor es:

$$\bar{U}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(173.20 \angle 0^\circ \cdot 1 \angle 120^\circ - 173.20 \angle 240^\circ\right) = 100 \angle 90^\circ$$

coincidente con el calculado más arriba.

c) Las intensidades que circulan por cada receptor son:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{89.66 \angle 45^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 8.96 \angle 135^\circ$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{173.20 \angle -30^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 17.32 \angle -30^\circ$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{89.66 \angle -105^\circ}{10 \angle 90^\circ} = 8.96 \angle -195^\circ$$

$$\bar{I}_1 = 8.96 \angle 135^\circ \qquad \bar{I}_2 = 17.32 \angle -30^\circ \qquad \bar{I}_3 = 8.96 \angle -195^\circ$$

d) Las componentes simétricas de las intensidades anteriores son:

$$\bar{I}_0 = \frac{1}{3} \cdot \left(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3\right)$$

$$\bar{I}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 \cdot \bar{A} + \bar{I}_3 \cdot \bar{A}^2 \right)$$

$$\bar{I}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 \cdot \bar{A}^2 + \bar{I}_3 \cdot \bar{A} \right)$$

Por ser un sistema a tres hilos, la componente homopolar, I_0, es nula.

En cuanto a los valores de las componentes directa e inversa son:

$$\bar{I}_d = \frac{1}{3} \cdot \left(8.96 \left| \underline{135^o} + 17.32 \right| \underline{90^o} + 8.96 \left| \underline{45^o} \right. \right) = 10 \left| \underline{90^o} \right.$$

$$\bar{I}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(8.96 \left| \underline{135^o} + 17.32 \right| \underline{210^o} + 8.96 \left| \underline{-75^o} \right. \right) = 7.32 \left| \underline{-150^o} \right.$$

$$\bar{I}_d = 10 \left| \underline{90^o} \right. \qquad \bar{I}_i = 7.32 \left| \underline{-150^o} \right.$$

e) En una red cuyas tensiones forman un sistema directo, el desequilibrio en tensión se caracteriza por la siguiente expresión:

$$\varepsilon_0 = \frac{U_0}{U_d} = \frac{73.20}{100} = 0.732$$

$$\varepsilon_0 = 0.732$$

En la misma red, el desequilibrio en intensidad viene dado por:

$$\gamma_1 = \frac{I_i}{I_d} = \frac{7.32}{10} = 0.732$$

$$\gamma_1 = 0.732$$