TEMA 3

POTENCIAL

3.1. ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA

Sea una carga **q**, (Fig.3.1) que se desplaza según una trayectoria **a-b**.

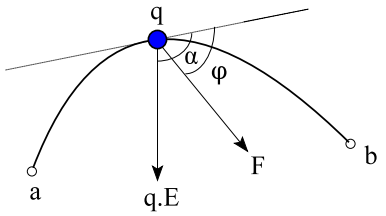


Fig. 3.1

Designando:

$q.\vec{E}$: Fuerza ejercida sobre la carga por el campo.

$\vec{F}$: Fuerza exterior no eléctrica.

La fuerza normal resultante, $\mathbf{F_n}$ tiene un módulo:

$$F_n = q.E.sen\alpha + F.sen\varphi \qquad (3.1)$$

La fuerza tangencial resultante, $\mathbf{F_t}$ tiene un módulo:

$$F_t = q.E.\cos\alpha + F.\cos\varphi \qquad (3.2)$$

La fuerza normal es centrípeta y en consecuencia modifica la trayectoria.

La fuerza tangencial comunica una aceleración, en consecuencia se verifica.

$$F_t = m.j = q.E.sen\alpha + F.sen\varphi \qquad (3.3)$$

Si **m** es la masa de la carga eléctrica **q**, se verifica:

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}.\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}.v \qquad (3.4)$$

$$m.j = m.v.\frac{dv}{ds} = q.E.\cos\alpha + F.\cos\varphi \qquad (3.5)$$

$$m.v.dv = q.E.\cos\alpha.ds + F.\cos\varphi.ds \;\; ; \;\; d(\frac{1}{2}.m.v^2) = q.E.\cos\alpha.ds + F.\cos\varphi.ds$$

$$F.\cos\varphi.ds = d(\frac{1}{2}.m.v^2) - q.E.\cos\alpha.ds \qquad (3.6)$$

Donde:

$F.\cos\varphi.ds$: Trabajo exterior realizado *sobre la carga* durante el desplazamiento.

$d(\frac{1}{2}mv^2)$: Variación de la energía cinética.

$-q.E.\cos\alpha.ds$: Trabajo realizado *contra la fuerza eléctrica*.

Pero, sabemos que se verifica:

$$dW = d(\textit{energía cinética}) + d(\textit{energía potencial}) \qquad (3.7)$$

Si se identifica (3.6) y (3.7), resulta:

$$dW = F.\cos\varphi.ds$$

$$d(EC) = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

$$d(EP) = -q.E.\cos\alpha.ds$$

Integrando (3.6), resulta:

$$\int_a^b F.\cos\varphi.ds = \int_{v_a}^{v_b} d(\frac{1}{2}mv^2) - \int_a^b q.E.\cos\alpha.ds \qquad (3.8)$$

Si se integra (3.7), resulta:

$$W_b - W_a = EC_b - EC_a + EP_b - EP_a \qquad (3.9)$$

Identificando (3.8) con (3.9), resulta:

$$W_b - W_a = \int_a^b F.\cos\varphi.ds$$

Para calcular la integral anterior hay que conocer la trayectoria, y ver como varía la fuerza en magnitud y dirección a lo largo de la misma.

$$EC_b - EC_a = \int_{v_a}^{v_b} d(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

Se puede calcular sin tener en cuenta como varía la fuerza.

$$EP_b - EP_a = -\int_a^b q.E.\cos\alpha.ds$$

Para calcular la integral no es necesario conocer la trayectoria

Si la velocidad es constante, (3.8) se reduce a:

$$\int_a^b F.\cos\varphi.ds = -\int_a^b q.E.\cos\alpha.ds = EP_b - EP_a \qquad (3.10)$$

Si la fuerza exterior es nula, pero la velocidad no es constante, (3.9) se reduce a:

$$0 = EC_b - EC_a + EP_b - EP_a$$

$$EC_b + EP_b = EP_a + EP_a = C^{te} \qquad (3.11)$$

La energía potencial de una carga en el infinito se considera nula, luego (3.10) se puede expresar:

$$EP_b = -\int_{\infty}^{b} q.E.\cos\alpha.ds \qquad (3.12)$$

Si se suprimen los límites de integración en (3.12), resulta:

$$EP = -\int q.E.\cos\alpha.ds = \int q.\vec{E}.\vec{ds} \qquad (3.13)$$

"La energía potencial de una carga de prueba en un punto de un campo eléctrico se define como, el trabajo realizado contra la fuerza ejercida sobre ella por el campo, cuando se trae la carga desde el infinito al punto".

3.2. POTENCIAL.

El potencial en un punto de un campo eléctrico, se define como la razón de la energía potencial de una carga de prueba al valor de su carga.

$$Potencial\ en\ b = U_b = \frac{EP\ de\ la\ carga\ q\ en\ b}{q}$$

Luego:

Energía Potencial de la carga **q** en **b** = **q** x Potencial en **b**

El potencial es una magnitud escalar.

$$U = \frac{EP}{q} = -\frac{\int q.E.\cos\alpha.ds}{q}$$

$$U = -\int .E.\cos\alpha.ds = -\int \vec{E}.\vec{ds} \qquad (3.14)$$

Físicamente el potencial en un punto puede definirse como: "*El trabajo realizado, por la unidad de carga, contra la fuerza ejercida por el campo, cuando se trae la carga desde el infinito al punto*"

La unidad en el S.I. es el **Voltio (V)**:

$$Potencial = \frac{Energía}{carga} \left[\frac{J}{C} = V\ (voltio)\right]$$

El potencial en un punto de campo electrostático será un voltio, *si para traer una carga de un culombio desde el infinito al punto, venciendo las fuerzas del campo, es necesario realizar un trabajo de un julio.*

3.3. POTENCIAL Y DISTRIBUCIÓN DE CARGA.

La diferencia de potencial entre dos puntos en un campo electrostático es igual a la integral curvilínea, cambiada de signo, de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de la trayectoria entre dichos puntos.

Supongamos que existe una carga puntual $\mathbf{q_1}$ en el punto $\mathbf{P}_1$, y consideremos una trayectoria arbitraria entre los puntos **a** y **b**. Sea **r** la distancia entre la carga **q** y un punto genérico ***p*** de la citada trayectoria.

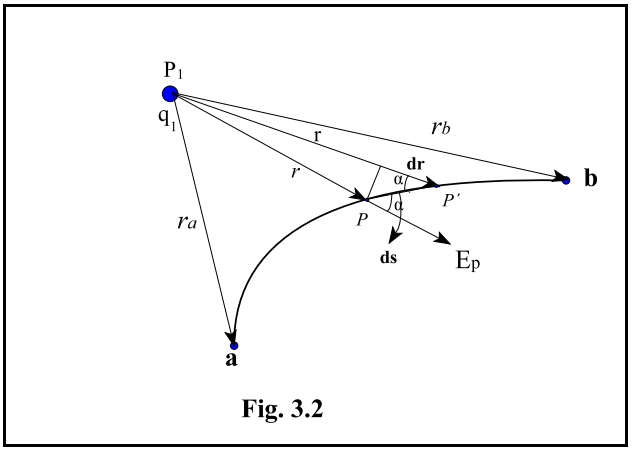


Fig. 3.2

La intensidad del campo eléctrico en el punto ***p*** es, de acuerdo con (2.3):

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_1}{r^2} \qquad (3.15)$$

Para un recorrido infinitesimal **ds** a partir de ***p***, la distancia entre **q** y ***p'*** habrá aumentado **dr**.

Siendo:

$$dr = ds.\cos\alpha$$

Sustituyendo (3.15) en (3.14) resulta:

$$U_b - U_a = -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.q_1.\int_a^b \frac{dr}{r^2} \qquad (3.16)$$

Operando (3.16) resulta:

$$U_b - U_a = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1}{r_b} - \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1}{r_a} \qquad (3.17)$$

Siendo:
r_a = La distancia entre **a** y **q.**
r_b = La distancia entre **b** y **q.**

Para determinar el potencial de un punto respecto del infinito, se hace en (3.17) $\mathbf{r_a = \infty}$, y $\mathbf{U_a=0}$

Como **b** puede ser cualquier punto del campo, el potencial en un punto genérico de un campo eléctrico creado por una carga puntual $\mathbf{q_1}$ situada a una distancia **r,** se define como:

$$U = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1}{r} \qquad (3.18)$$

Si **q** se expresa en culombios y **r** en metros, **U** vendrá en **voltios**.

3.4. GRADIENTE DE POTENCIAL

Supongamos un espacio donde existe la carga $\mathbf{q_1}$ en el punto $\mathbf{P_1(x_1,y_1,z_1)}$. Sea la función escalar función de punto[1] **P(x,y,z)** (3.18) (Ver Fig. 2.1):

$$U = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \qquad (3.19)$$

[1]Un campo escalar de posición es definido por una función de posición P(x,y,z) que asigna a cada punto en el espacio un valor numérico escalar

Donde:

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

Se verifica:

$$\frac{\delta U}{\delta x} = \frac{\delta U}{\delta |r-r_1|}.\frac{\delta |r-r_1|}{\delta x}$$

$$\frac{\delta U}{\delta y} = \frac{\delta U}{\delta |r-r_1|}.\frac{\delta |r-r_1|}{\delta y}$$

$$\frac{\delta U}{\delta z} = \frac{\delta U}{\delta |r-r_1|}.\frac{\delta |r-r_1|}{\delta z}$$

Ahora bien:

$$\frac{\delta U}{\delta |\vec{r}-\vec{r}_1|} = -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}$$

$$\frac{\delta |\vec{r}-\vec{r}_1|}{\delta x} = \frac{x-x_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

$$\frac{\delta |\vec{r}-\vec{r}_1|}{\delta y} = \frac{y-y_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

$$\frac{\delta |\vec{r}-\vec{r}_1|}{\delta z} = \frac{z-z_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

Por tanto, se verifica:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta U}{\delta x} &= -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}.(x-x_1) \\ \frac{\delta U}{\delta y} &= -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}.(y-y_1) \\ \frac{\delta U}{\delta z} &= -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}.(z-z_1) \end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

Por otra parte, si consideramos $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$ y $\mathbf{E}_z$, las componentes de **E** en **P(x,y,z)**, según los ejes **x**, **y**, **z**, podemos escribir:

$$\vec{E} = E_x.\vec{i} + E_y.\vec{j} + E_z.\vec{k}$$

Siendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ los vectores unitarios según los ejes **x**, **y**, **z**, respectivamente.

También se cumple:

$$(\vec{r}-\vec{r}_1) = (x-x_1).\vec{i} + (y-y_1).\vec{j} + (z-z_1).\vec{k}$$

Luego:

$$\vec{E}_x = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.q_1.\frac{(x-x_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}.\vec{i}$$

$$\vec{E}_y = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.q_1.\frac{(y-y_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}.\vec{j} \qquad (3.21)$$

$$\vec{E}_z = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.q_1.\frac{(z-z_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}.\vec{k}$$

De acuerdo con (2.3)

Por tanto, se verifica:

$$\vec{E} = \frac{q_1.[(x-x_1).\vec{i} + (y-y_1).\vec{j} + (z-z_1).\vec{k}]}{4.\pi.\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$$

De acuerdo con (3.20), podemos escribir:

$$\vec{E} = -(\frac{\delta U}{\delta x}.\vec{i} + \frac{\delta U}{\delta y}.\vec{j} + \frac{\delta U}{\delta z}.\vec{k}) = -\vec{\nabla}U \qquad (3.22)$$

Es decir que el campo eléctrico deriva de una función escalar **U,** llamada potencial eléctrico en el punto **P,** como consecuencia de la carga $\mathbf{q}_1$ situada en $\mathbf{P_1(x_1, y_1, z_1)}$. *El campo eléctrico es el gradiente de potencial cambiado de signo*.

En el caso de que existan $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$, $\mathbf{q_3}$, ..., $\mathbf{q_n}$ cargas puntuales en los puntos $\mathbf{P_1(x_1,y_1,z_1)}$, $\mathbf{P_2(x_2,y_2,z_2)}$, $\mathbf{P_3(x_3,y_3,z_3)}$, $\mathbf{P_n(x_n,y_n,z_n)}$, respectivamente, se verifica:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \qquad (3.23)$$

3.5 DIFERENCIA DE POTENCIAL

Se denomina diferencia de potencial entre dos puntos de un campo electrostático, a la diferencia de sus potenciales.

Si dividimos (3.10) entre **q**, resulta:

$$\frac{EP_b}{q} - \frac{EP_a}{q} = -\int_a^b \vec{E}.d\vec{s} \qquad (3.24)$$

Ahora bien, de acuerdo con (3.14):

$$\frac{EP_b}{q} = U_b \quad ; \quad \frac{EP_a}{q} = U_a$$

Luego:

$$U_b - U_a = -\int_a^b \vec{E}.d\vec{s} \qquad (3.25)$$

Por tanto, podemos definir la *diferencia de potencial (d.d.p.) entre dos puntos de un campo electrostático, como la integral curvilínea, cambiada de signo, de la intensidad del campo eléctrico entre ambos puntos.* También como *el trabajo por unidad de carga realizado contra las fuerzas eléctricas, cuando se desplaza dicha carga desde un punto a otro.*

La diferencia de potencial se expresa en **voltios** en el S.I., de forma análoga a como se expresan los potenciales.

En consecuencia, podemos decir que *la diferencia de potencial entre dos puntos de un campo electrostático es de un voltio, si para desplazar una carga de un culombio entre dichos puntos necesitamos gastar un trabajo de un julio.*

Si la carga **q** sufre un desplazamiento **ds** en un campo eléctrico venciendo las fuerzas del campo, el trabajo realizado sobre la carga, de acuerdo con (3.13), es:

$$dW = - q.\vec{E}.\vec{ds}$$

Ahora bien, según (3.22),

$$\vec{E} = -(\frac{\delta U}{\delta x}.\vec{i} + \frac{\delta U}{\delta y}.\vec{j} + \frac{\delta U}{\delta z}.\vec{k})$$

$$\vec{ds} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$$

Luego:

$$- \vec{E}\vec{ds} = (\frac{\delta U}{\delta x}.dx + \frac{\delta U}{\delta y}.dy + \frac{\delta U}{\delta z}.dz) = dU$$

Por tanto:

$$dW = q.dU \qquad (3.26)$$

El trabajo realizado sobre la carga, para llevarla desde **a** a **b,** es:

$$\int_a^b dW = \int_a^b q.dU$$

$$W_{a\to b} = q.(U_b - U_a)$$

En consecuencia, la diferencia de potencial entre **a** y **b** es:

$$U_b - U_a = \frac{W_{a\to b}}{q} \qquad (3.27)$$

Se define diferencia de potencial entre dos puntos **a** y **b,** como el trabajo realizado por la unidad de carga contra las fuerzas eléctricas, cuando se mueve dicha carga desde el punto **a** al punto **b**.

Si la carga es positiva, y se cumple:

$U_b > U_a$ = Se trata de un trabajo *contra las fuerzas eléctricas* $W_{a \to b}$ y es positivo.

$U_b < U_a$ = Se trata de un trabajo *que realiza el propio campo* $W_{a \to b}$ y es negativo.

Pero si la carga fuese negativa, y se cumple:

$U_b < U_a$ = Se trata de un trabajo *contra las fuerzas eléctricas* $W_{a \to b}$ y es positivo.

$U_b > U_a$ = Se trata de un trabajo *que realiza el propio campo* $W_{a \to b}$ y es negativo.

3.6. SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES.

Son aquellas en que todos los puntos están al mismo potencial. Por tanto no se requiere trabajo para mover un cuerpo cargado sobre una superficie equipotencial.

La superficie equipotencial es perpendicular al campo[2].

[2] Si no fuese de este modo, el campo tendría una componente tangencial y por tanto sería preciso realizar un trabajo contra las fuerzas ejercidas por dicho campo para mover la carga en dicha dirección. Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales son perpendiculares entre sí.
Se ha demostrado en 2.5 que las líneas de fuerza son perpendiculares a la superficie de un conductor cargado si las cargas permanecen en reposo. En consecuencia, la superficie del conductor es una superficie equipotencial. También podemos afirmar que, como el campo en el interior del conductor es nulo, su volumen interior es un volumen equipotencial, y en consecuencia, tiene el mismo potencial que la superficie del conductor.