TEMA 6

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

6.1. FUERZA ELECTROMOTRIZ

Todo dispositivo capaz de producir una transformación reversible entre la energía eléctrica y otra forma de energía, se denomina *generador de fuerza electromotriz* (f.e.m.).

El valor de la fuerza electromotriz de un generador puede definirse como: *La energía convertida de forma eléctrica a forma no eléctrica o viceversa, por unidad de carga que pasa a través de una sección del generador*. La fuerza electromotriz se define como trabajo por unidad de carga.

$$E = \frac{dW}{dq} \qquad (6.1)$$

La unidad en el S.I. es el **voltio**:

$$J.C^{-1} = V \ (voltio)$$

Decimos que un generador tiene una fuerza electromotriz de un voltio, si para hacer circular por él un culombio se precisa gastar el trabajo de un julio.

En un tiempo **dt**, el trabajo realizado por el generador, según (6.1) es:

$$dW = E.dq$$

y en la unidad de tiempo:

$$\frac{dW}{dt} = E.\frac{dq}{dt} = E.i$$

$$P = E.i \qquad (6.2)$$

6.2. ECUACIÓN DEL CIRCUITO

En el circuito de la Fig.6.1 se verifica:

$U_{ad} = 0$ Por no existir resistencia entre **a** y **d**.

$U_{bc} = 0$ Por no existir resistencia entre **b** y **c**

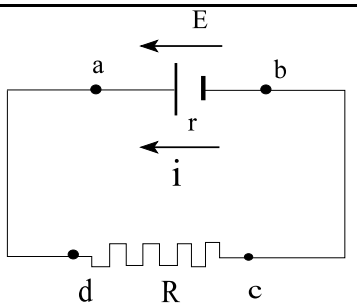


Fig. 6.1

Aunque **E** no es magnitud vectorial, es útil asignarle un sentido en el que incorpora energía a la carga circulante.

Balances de potencias en las diversas partes del circuito de la Fig. 6.1.:

LUGAR	POTENCIA CEDIDA POR LA CARGA CIRCULANTE	POTENCIA CEDIDA A LA CARGA CIRCULANTE
R	$i^2.R$	
r	$i^2.r$	
f.e.m.		E.i

Por el principio de conservación de potencias:

$$i^2.R + i^2.r = E.i$$

$$i = \frac{E}{R+r} \qquad (6.3)$$

Generalizando para **m** resistencias:

$$i = \frac{E}{\sum_{j=1}^{m} r_j} \qquad (6.4)$$

Supongamos ahora, que en el circuito existe un generador en el cual se realiza trabajo por la carga circulante (Fig.6.2).

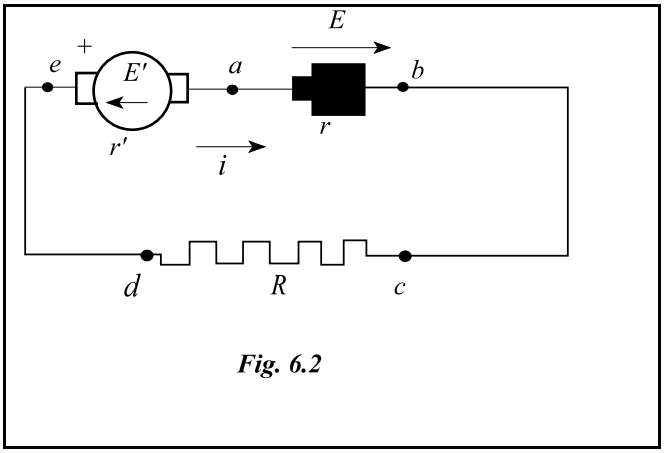


Fig. 6.2

Por ser:

$U_b > U_a$ E irá de **a** a **b**

$U_e > U_a$ E' irá de **a** a **e**

Vamos a estudiar las potencias en las diversas partes del circuito.

LUGAR	POTENCIA CEDIDA POR LA LA CARGA CIRCULANTE	POTENCIA CEDIDA A LA CARGA CIRCULANTE
f.e.m. E		E.i
r	$i^2.r$	
R	$i^2.R$	
f.e.m. E'	E'.i	
r'	$i^2.r'$	

Por el principio de conservación de las potencias, resulta:

$$E.i = E'i + i^2.r + i^2.r' + i^2.R$$

$$i = \frac{E - E'}{R + r + r'}$$

Generalizando para **n** generadores de fuerza electromotriz y **m** resistencias, resulta:

$$i = \frac{\sum_{j=1}^{n} E_j}{\sum_{j=1}^{m} r_j} \qquad (6.5)$$

Como regla práctica, una vez fijado un sentido para la intensidad, sí:

i ⇨ E ⇨ Fuerza electromotriz positiva. Trabajo realizado **sobre** la carga circulante.

i ⇨ E ⇦ Fuerza electromotriz negativa. Trabajo realizado **por** la carga circulante.

6.3. DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS DE UN CIRCUITO

Sea el circuito de la Fig. 6.3:

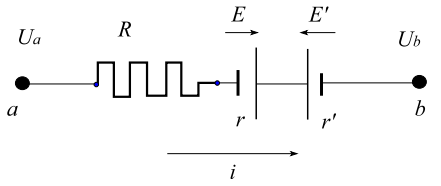


Fig. 6.3

Se establece en él, el siguiente balance de potencias:

LUGAR	POTENCIA CEDIDA POR LA LA CARGA CIRCULANTE	POTENCIA CEDIDA A LA CARGA CIRCULANTE
Tramo a-b		$U_{ab}.i$
f.e.m. E		E.i
f.c.e.m. E'	E'.i	
r	$i^2.r$	
R	$i^2.R$	
r'	$i^2.r'$	

Por el principio de conservación de potencias, se cumple:

$$E'.i + i^2.R + i^2.r + i^2.r' = U_{ab}.i + E.i$$

$$U_{ab} = i.(r + r' + R) - (E - E')$$

Generalizando para **n** fuerzas electromotrices y **m** resistencias,

$$U_{ab} = i \sum_{j=1}^{m} r_j - \sum_{j=1}^{n} E_j \qquad (6.6)$$

Si no existen fuerzas electromotrices entre **a** y **b**, se obtiene:

$$U_{ab} = i \sum_{j=1}^{m} r_j = i.R \qquad (Ley\ de\ Ohm)$$

Si **a** y **b** coinciden:

$$0 = i \sum_{j=1}^{m} r_j - \sum_{j=1}^{n} E_j$$

Que es la expresión (6.5).

$$i = \frac{\sum_{j=1}^{n} E_j}{\sum_{j=1}^{m} r_j}$$

6.4. VOLTAJE EN LOS BORNES DE UN GENERADOR.

Existen dos posibilidades:

a) La fuerza electromotriz *cede* la energía a la carga circulante.

$$U_{ba} = i.r - E$$

$$U_{ab} = E - i.r \qquad (6.7)$$

Expresión que se conoce como *Ley del Generador*.

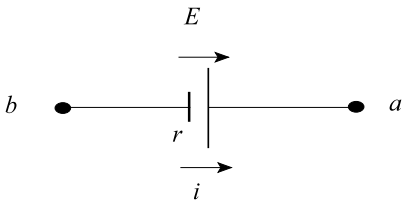


Fig. 6.4

b) La fuerza electromotriz *absorbe* energía de la carga circulante

$$U_{ba} = - i.r - E'$$

$$U_{ab} = E' + i.r \qquad (6.8)$$

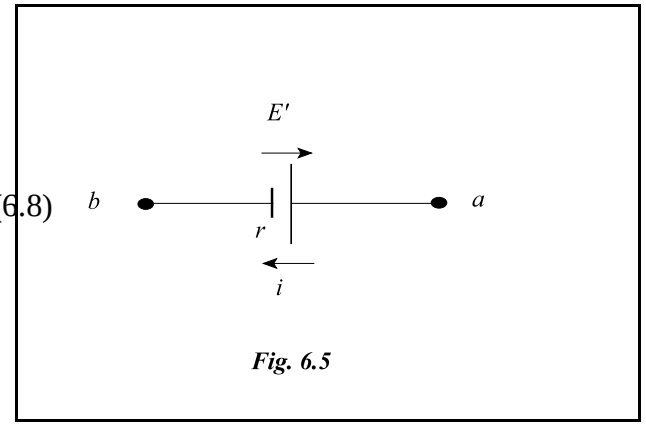


Fig. 6.5

Expresión que se conoce como *Ley del Motor*.

Si llamamos $\mathbf{P_u}$ la potencia útil y $\mathbf{P_t}$ la potencia absorbida.

Las potencias útiles y absorbidas en los supuestos anteriores son:

a) $P_u = U_{ab}.i$ $\qquad$ $P_t = E.i$ $\qquad$ b) $P_u = E'.i$ $\qquad$ $P_t = U_{ab}.i$

En consecuencia los rendimientos son:

a) $\eta_g = \dfrac{P_u}{P_t} = \dfrac{U_{ab}}{E}$ $\qquad$ b) $\eta_m = \dfrac{P_u}{P_t} = \dfrac{E'}{U_{ab}}$ $\qquad$ (6.9)

6.5. LEYES DE KIRCHHOFF[1].

En los epígrafes anteriores se han considerado circuitos simples, en los que todos los elementos están conectados en serie y recorridos por una corriente de la misma intensidad. Ahora se va a estudiar el caso general de una red de conductores, es decir, un conjunto de conductores conectados entre sí de cualquier forma.

Se define *nudo* como un punto de una red en que se unen más de dos elementos. Cada elemento de un circuito se denomina *rama* y constituye un posible camino entre dos nudos.

Se designa con el nombre de *circuito cerrado, contorno poligonal, célula o malla,* el

[1] Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), físico alemán, nació en Königsberg (actualmente Kaliningrado, Rusia) y estudió en la universidad de esa ciudad. Fue profesor de física en las universidades de Breslau, Heidelberg y Berlín. Con el químico alemán Robert Wilhelm Bunsen, desarrolló el espectroscopio moderno para el análisis químico. En 1860 los dos científicos descubrieron el cesio y el rubidio mediante la espectroscopia. Kirchhoff dirigió importantes investigaciones sobre la transferencia de calor y también expuso dos reglas, actualmente conocidas como leyes de Kirchhoff, con respecto a la distribución de corriente en circuitos eléctricos.

conjunto de ramas que hay que recorrer cuando se parte de un nudo para volver al mismo después de haber seguido varias ramas sin que se haya producido ninguna interrupción, y sin pasar dos veces por la misma.

6.5.1. PRIMERA LEY.

Consideremos un conjunto de generadores de fuerza electromotriz y receptores repartidos en diferentes ramas de una red. Partiendo de la base que la electricidad en un sistema de conductores no puede acumularse en ningún punto, la suma algebraica de las intensidades de las corrientes que concurren en un nudo es cero[2]. Es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} i_j = 0 \qquad (6.10)$$

6.5.2. SEGUNDA LEY.

En todo circuito cerrado, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión debidas a las resistencias. De acuerdo con (6.5), se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n} E_j = \sum_{j=1}^{m} r_j . i_j \qquad (6.11)$$

6.6. ECUACIONES DE MALLAS.

En un circuito en que se conozcan las fuerzas electromotrices presentes en él y todos los elementos que constituyen las ramas, las corrientes en cada rama se pueden calcular siempre aplicando la ley de Ohm y los dos lemas de Kirchhoff. Sin embargo existen otros métodos que proporcionan una forma más práctica de resolver el problema.

En primer lugar procedemos a sustituir cada elemento que constituye la red por un segmento rectilíneo entre los dos nudos consecutivos en donde se encuentra, con lo cual vamos a obtener en un diagrama un *grafo* de la misma. La sustitución de los nudos se hará dé forma que la figura geométrica obtenida sea lo más sencilla posible.

Apoyándonos en la topología, vamos a formular las ecuaciones de las redes eléctricas.

Si unimos todos los nudos de la red, por las suficientes ramas, de forma que la figura no constituya un camino cerrado, obtenemos un *árbol* del grafo correspondiente. Las ramas que restan para formar el grafo se denominan *eslabones.*

[2]Se consideran en cada nudo como positivas las corrientes entrantes y negativas las salientes.

Si sumamos un eslabón a un árbol obtenemos un *bucle*.

Colocando todos los eslabones posibles en un determinado árbol obtenemos un conjunto de bucles, que determinan todas las figuras posibles que se pueden construir en el árbol.

Suponemos que en cada eslabón circula una corriente cuyo sentido lo fijamos de una forma arbitraria, al colocar este eslabón en el árbol determina un bucle, que es el camino cerrado para una corriente cuyo sentido dependerá del que hayamos establecido en el eslabón.

Suponiendo que el sentido de la corriente en cada eslabón, sea independiente del que tenga en los restantes, la corriente en cada bucle dependerá solo de lo que hayamos fijado en el eslabón que lo origina. El número total de eslabones que origina un grafo determinado, da lugar a un número de ecuaciones independientes, que son las necesarias para calcular todas las corrientes que circulan por las ramas de una red. La corriente en cada rama del árbol se calcula por adición de las corrientes de bucles comunes a dicha rama.

Una red recibe el nombre de *planar*, cuando el grafo correspondiente lo podemos dibujar en una superficie plana de forma que los segmentos (que no tienen por que ser necesariamente rectilíneos) que lo forman no se corten.

Recibe el nombre de *malla* a los espacios abiertos de una red planar. Evidentemente la corriente que hemos llamado de bucle circula por la malla que lo origina, por tanto recibe el nombre de *corriente de malla*.

El número de mallas es igual al número de eslabones en una red planar y por tanto, es igual al número de ecuaciones independientes necesarias para calcular todas las corrientes que circulan por las ramas de la red.

Si lo que se trata es de resolver redes sencillas, es conveniente elegir el árbol de forma que los eslabones, necesarios para definir un grafo, definan corrientes de malla.

Cuando las redes son mas complicadas puede ocurrir, bien que no sean planares, o siéndolo que sean difíciles de identificar las mallas. Un método recomendable en estos casos, es el *método del eslabón general*.

Para resolver la red elegiremos las ecuaciones de las corrientes de malla. Las ecuaciones de las corrientes de malla se determinan al añadir cada eslabón de forma independiente al árbol.

La forma de expresar las ecuaciones de malla es:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= R_{11}.I_1 + R_{12}.I_2 + ... + R_{1j}.I_j + ... + R_{1n}.I_n \\
U_2 &= R_{21}.I_1 + R_{22}.I_2 + ... + R_{2j}.I_j + ... + R_{2n}.I_n \\
&..... \\
U_j &= R_{j1}.I_1 + R_{j2}.I_2 + ... + R_{jj}.I_j + ... + R_{jn}.I_n \\
&..... \\
U_n &= R_{n1}.I_1 + R_{n2}.I_2 + ... + R_{nj}.I_j + ... + R_{nn}.I_n
\end{aligned}
\qquad (6.12)
$$

Donde:

U_j : Son las sumas de las fuerzas electromotrices en las respectivas mallas, siendo positivas, si el sentido coincide con el de la corriente de malla y negativas en caso contrario.

R_{jj} : Son las resistencias propias de cada malla, que se obtienen sumando las resistencias que recorre la corriente en la malla ***j***.

R_{jk} : Son las coresistencias o resistencias mutuas de la malla ***j*** y ***k***, y son las resistencias comunes a las corrientes de malla indicadas por los subíndices. El sentido será positivo o negativo, según que los sentidos de las corrientes de malla sean iguales u opuestas en la coresistencia.

Este método tiene la enorme ventaja de que las ecuaciones (6.12) pueden aplicarse a cualquier red.

El orden que se sigue para formular de una forma numérica las anteriores ecuaciones son:

1º.- Determinación del número de ecuaciones de malla independientes.

2º.- Identificación de las mallas.

3º.- Determinación de las fuerzas electromotrices, de las resistencias propias y de las coresistencias, en cada malla.

El sistema de ecuaciones (6.12), lo podemos expresar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_j \\ . \\ . \\ U_n \end{matrix} = \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & . & . & R_{1J} & . & . & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & . & . & R_{2J} & . & . & R_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ R_{J1} & R_{J2} & . & . & R_{JJ} & . & . & R_{Jn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ R_{n1} & R_{n2} & . & . & R_{nJ} & . & . & R_{Jn} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ . \\ I_j \\ . \\ . \\ I_n \end{matrix} \qquad (6.13)$$

Expresión que se puede poner de la forma:

$[U] = [R].[I]$

Operando:

$[R]^{-1}.[U] = [I]$

Por tanto se pueden despejar las intensidades, I_1, I_2, ..., I_j, ... I_n.

$$\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ . \\ . \\ I_j \\ . \\ . \\ I_n \end{matrix} = \begin{matrix} R_{11} & R_{12} & . & . & R_{1J} & . & . & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & . & . & R_{2J} & . & . & R_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ R_{J1} & R_{J2} & . & . & R_{JJ} & . & . & R_{Jn} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ R_{n1} & R_{n2} & . & . & R_{nJ} & . & . & R_{Jn} \end{matrix}^{-1} \cdot \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_j \\ . \\ . \\ U_n \end{matrix} \qquad (6.14)$$

6.7. RESOLUCIÓN DE UNA RED POR EL MÉTODO DE LAS ECUACIONES DE MALLA.

Sea el circuito de la Fig. 6.6, vamos a calcular las intensidades y diferencias de potencial en el mismo, mediante la aplicación del método de las ecuaciones de malla.

En primer lugar vamos a sustituir las ramas por segmentos rectilíneos, con lo que se obtendrá la Fig. 6.7

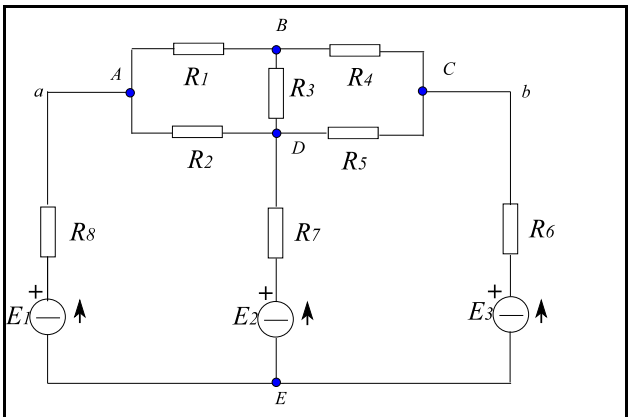


Fig. 6.6

La Fig. 6.7 se puede simplificar todavía mas, dejándola reducida a la Fig. 6.8

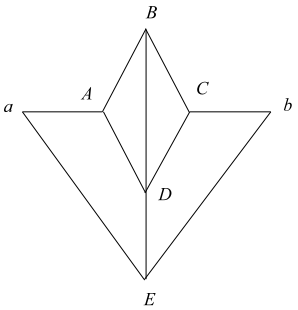


Fig.6.7

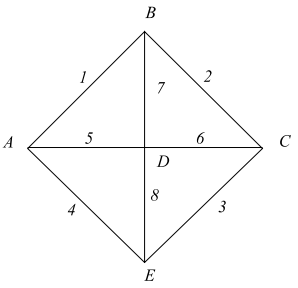


Fig. 6.8

En la Fig. 6.8, las ramas se han numerado del uno al ocho, con objeto de que no se produzcan errores en la construcción de los árboles de este grafo.

A continuación se van a dar del grafo de la Fig. 6.8 una serie de árboles, indicando a la derecha de los mismos, los correspondientes eslabones.

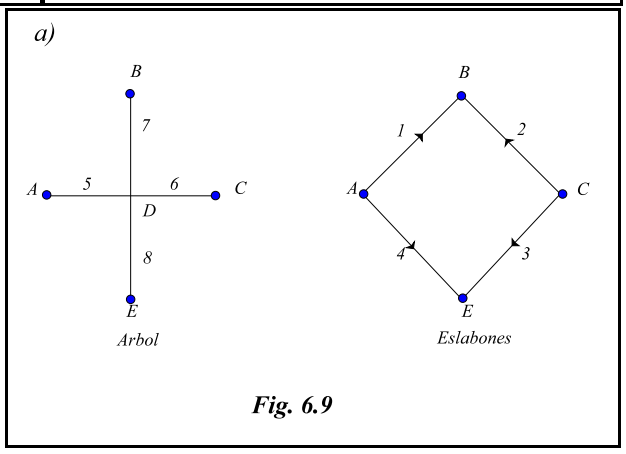


Fig. 6.9

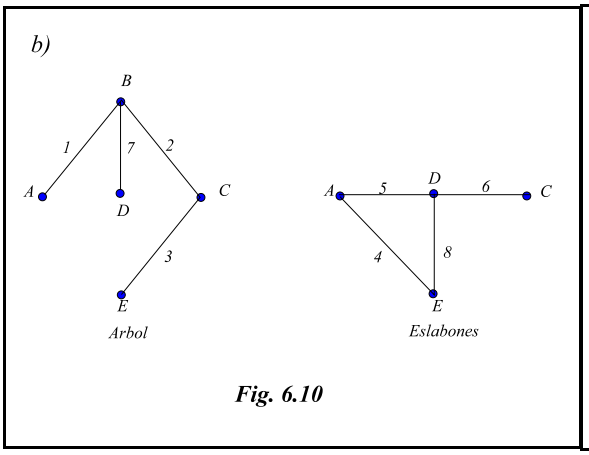


Fig. 6.10

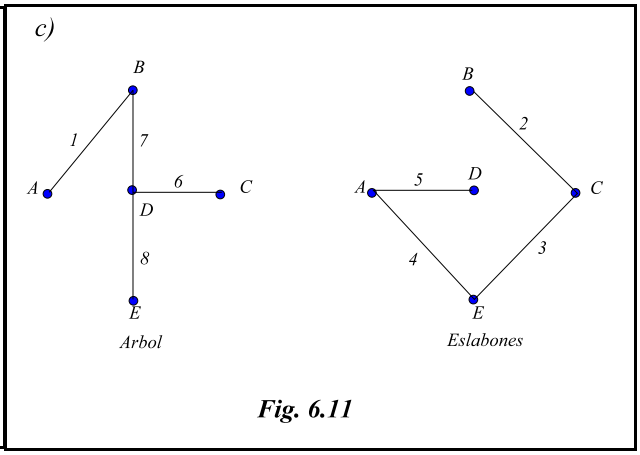


Fig. 6.11

Para resolver el circuito, vamos a partir del árbol **a)** Fig.6.9.

Colocando el eslabón **1** en el árbol, obtenemos el bucle **1**, que se corresponde con la malla **1**, cuya corriente de bucle se indica en la Fig. 6.12 (el sentido resulta de suponer que en el eslabón **1** era de **A** a **B**, este sentido elegido de forma arbitraria) con un número encerrado dentro de una circunferencia.

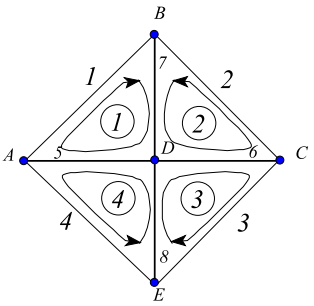


Fig. 6.12

Colocando los eslabones 2, 3 y 4, obtenemos los bucles 2, 3 y 4, respectivamente.

De acuerdo con lo anterior, en las ramas 5, 6 , 7 y 8, las corrientes serán:

$$I_5 = I_1 + I_4$$

$$I_6 = I_2 + I_3$$

$$I_7 = I_1 + I_2 \qquad (6.15)$$

$$I_8 = I_3 + I_4$$

Expresiones que se obtienen al aplicar el primer lema de Kirchhoff a los nudos **A**, **C**, **B** y **D**, respectivamente.

Las corrientes de malla en el circuito de la Fig.6.6, se indica en la Fig. 6.13

Aplicando la ecuación de malla a cada una de las que recorren las corrientes I_1, I_2, I_3 e I_4, resultan las siguientes ecuaciones.

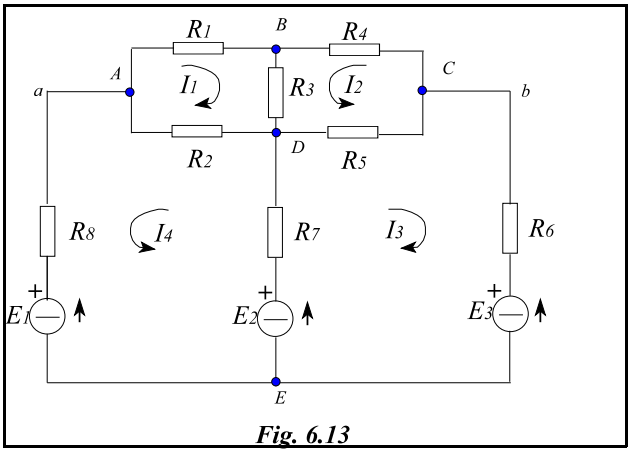


Fig. 6.13

$$E_2 - E_1 = R_2.(I_1 + I_4) + R_8.I_4 + R_7.(I_3 + I_4)$$

$$E_2 - E_3 = R_5.(I_2 + I_3) + R_6.I_3 + R_7.(I_3 + I_4)$$

$$0 = R_3.(I_1 + I_2) + R_1.I_1 + R_2.(I_1 + I_4) \qquad (6.16)$$

$$0 = R_3.(I_1 + I_2) + R_4.I_2 + R_5.(I_2 + I_3)$$

Operando el sistema (6.16), resulta:

$$0 = I_1.(R_1 + R_2 + R_3) + I_2.R_3 + I_4.R_2$$

$$0 = I_1.R_3 + I_2.(R_3 + R_4 + R_5) + I_3.R_5 \qquad (6.17)$$

$$E_2 - E_3 = I_2.R_5 + I_3.(R_5 + R_6 + R_7) + I_4.R_7$$

$$E_2 - E_1 = I_1.R_2 + I_3.R_7 + I_4.(R_2 + R_7 + R_8)$$

Podemos plantear directamente la ecuación matricial correspondiente, calculando las resistencias propias de cada malla, las coresistencias y las fuerzas electromotrices de cada malla. La expresión matricial la podemos plantear directamente sin mas que hacer:

$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3$; $R_{12} = R_3$; $R_{13} = 0$; $R_{14} = R_2$
$R_{21} = R_3$; $R_{22} = R_3 + R_4 + R_5$; $R_{23} = R_5$; $R_{24} = 0$
$R_{31} = 0$; $R_{32} = R_5$; $R_{33} = R_5 + R_6 + R_7$; $R_{34} = R_7$
$R_{41} = R_2$; $R_{42} = 0$; $R_{43} = R_7$; $R_{44} = R_2 + R_7 + R_8$

Por otra parte se tiene:

$U_1 = 0$; $U_2 = 0$; $U_3 = E_2 - E_3$; $U_4 = E_2 - E_1$

La expresión matricial que permite calcular las intensidades de malla es:

$$\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{matrix} = \begin{matrix} R_1+R_2+R_3 & R_3 & 0 & R_2 \\ R_3 & R_3+R_4+R_5 & R_5 & 0 \\ 0 & R_5 & R_5+R_6+R_7 & R_7 \\ R_2 & 0 & R_7 & R_2+R_7+R_8 \end{matrix}^{-1} \cdot \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ E_2-E_3 \\ E_2-E_1 \end{matrix} \qquad (6.18)$$

Conocidos los valores obtenidos de (6.18), se puede determinar los correspondientes a las intensidades de cada rama de la red y en consecuencia, las diferencias de potencial entre cualquiera de sus nudos.



Gustav Robert Kirchhoff
(1824-1887)