TEMA 10

INDUCCIÓN MUTUA. AUTOINDUCCIÓN

10.1. INDUCCIÓN MUTUA.

Sean dos circuitos **A** y **B** (Fig. 10.1) recorridos por corrientes de intensidades $\mathbf{i_1}$ e $\mathbf{i_2}$, respectivamente.

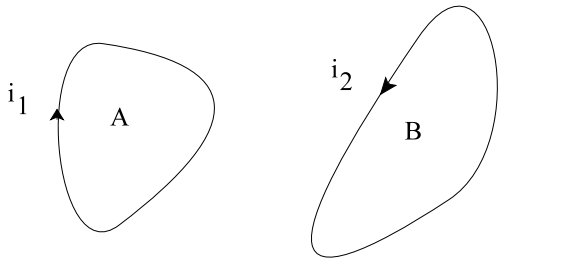


Fig. 10.1

Se dice que están en inducción mutua cuando una fracción del flujo creado por uno de ellos atraviesa el otro.

Por lo tanto, toda variación de la corriente que recorra uno de ellos engendrará en el otro una fuerza electromotriz de inducción llamada *fuerza electromotriz de inducción mutua*.

10.2. COEFICIENTE DE INDUCCIÓN.

En la Fig.10.1, la corriente $\mathbf{i_1}$ crea un campo magnético cuyo vector inducción es $\mathbf{B_1}$.

El circuito **B** es atravesado por un flujo $\mathbf{\Phi}_{1.2}$, correspondiente al campo creado por $\mathbf{i_1}$, cuyo valor es:

$$\Phi_{1.2} = \iint_{S_B} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A} \qquad (10.1)$$

Siendo $\mathbf{S_B}$ el área limitada por el circuito **B**.

Vamos a expresar los flujos de inducción mutua con la hipótesis de que el medio en que se encuentran las dos espiras es el aire o una sustancia ferromagnética, en un intervalo conveniente de inducción.

El flujo que atraviesa **B** es proporcional a $\mathbf{i_1}$, según se desprende de (10.1), ya que sí:

$$B_1 \propto i_1 \quad ; \quad \Phi_{1.2} \propto B_1$$

Por tanto

$$\Phi_{1.2} \propto i_1 \qquad (10.2)$$

La proporción (10.2) se convierte en una igualdad mediante el coeficiente $\mathbf{M_{AB}}$.

$$\Phi_{1.2} = M_{AB}.i_1 \qquad (10.3)$$

Asimismo la corriente $\mathbf{i_2}$ crea un flujo, parte del cual corta a la espira **A**, cuyo valor es:

$$\Phi_{2.1} = \iint_{S_A} \vec{B}_2 \; . \; d\vec{A} \qquad (10.4)$$

siendo $\mathbf{B_2}$ el vector inducción creado por $\mathbf{i_2}$ y $\mathbf{S_A}$ el área limitada por el circuito **A**.

Análogamente a lo razonado en relación con la espira **B**, obtenemos para **A**:

$$\Phi_{2.1} = M_{BA}.i_2 \qquad (10.5)$$

$\mathbf{M_{AB}}$ y $\mathbf{M_{BA}}$ son factores de proporcionalidad, denominados *coeficientes de inducción.*

10.3. IGUALDAD DE LOS COEFICIENTES DE INDUCCIÓN.

Se puede comprobar que $\mathbf{M_{AB}}$ y $\mathbf{M_{BA}}$ son iguales. En efecto en la Fig. 10.2, **A** y **B** son bobinas distintas que actúan magnéticamente una sobre otra; **r** es una resistencia adicional destinada a igualar la resistencia entre **OF** y **FH**.

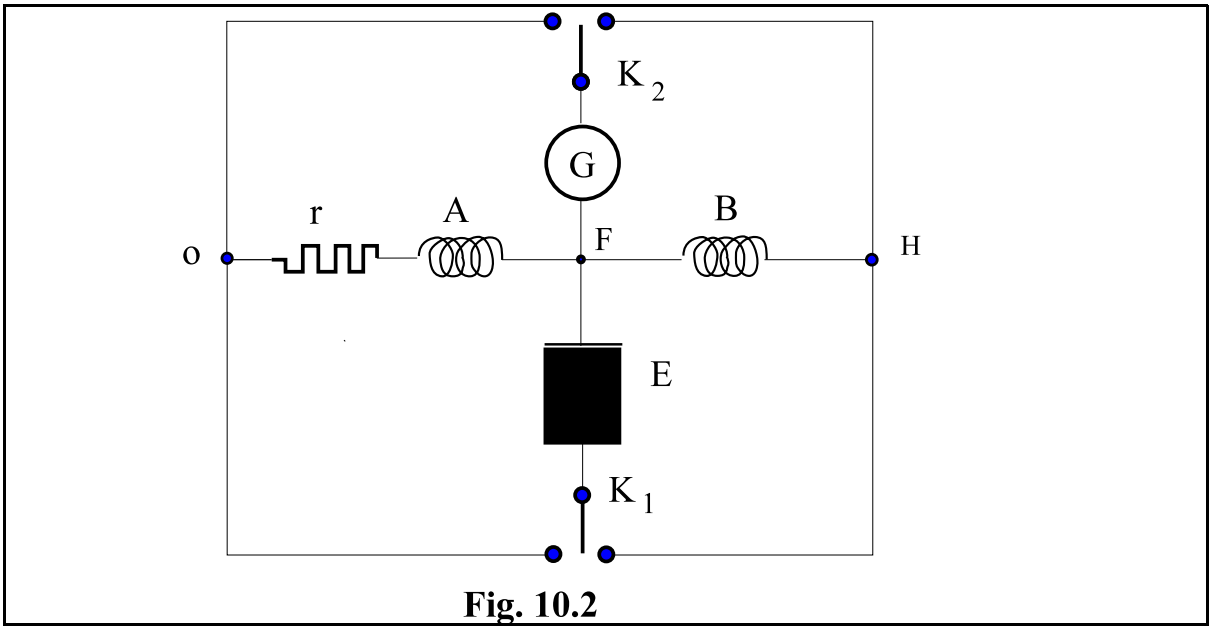


Fig. 10.2

En la Fig. 10.2, se tiene:

G: Galvanómetro balístico
E: Fuente no polarizable.
K_1: Conmutador simple.
K_2: Conmutador simple.
A y B: Bobinas.
r : Resistencia.

La operación de comprobación se realiza en dos fases:

1º.- Se cierra **A** sobre el galvanómetro y se alimenta **B**. El galvanómetro se desvía $\boldsymbol{\theta_1}$.
2º.- Se cierra **B** sobre el galvanómetro y se alimenta **A**. El galvanómetro se desvía $\boldsymbol{\theta_1}$.

Las cantidades de electricidad inducidas $\mathbf{Q = \varphi/R}$, son las mismas en ambos casos. Como las resistencias **R** en los circuitos son iguales, la variación de flujo es la misma en los dos casos. Para una misma intensidad **i** en las bobinas, el flujo total creado por **B** y que atraviesa **A** es igual al flujo total engendrado por **A** y abrazado por **B**. Esto demuestra la igualdad:

$$\boldsymbol{\Phi_{1.2} = \Phi_{2.1}}$$

$$i.M_{AB} = i.M_{BA} \quad ; \quad M_{AB} = M_{BA} = M \qquad (10.6)$$

El valor común de los dos coeficientes de inducción recibe el nombre de inductancia mutua de los circuitos **A** y **B**.

Se define inductancia[1] mutua como *el flujo total que uno de los circuitos envía a través del otro cuando el primero está recorrido por la unidad de corriente.*

Como la inductancia mutua es una relación

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{Flujo}{Intensidad}$$

Se mide en la misma unidad que la autoinducción, es decir en **Henrios.**

Se dice que dos circuitos tienen una inductancia de un henrio cuando, *una corriente de un amperio en el primero crea en el segundo un flujo total de un wéber,* o bien, *cuando una corriente que varía a razón de un amperio por segundo, en el primero, crea en el segundo una fuerza electromotriz de un voltio.*

10.4 AUTOINDUCCIÓN.

Una bobina recorrida por una corriente **i** crea en su seno una inducción **B** que origina un flujo **Φ**. Si la corriente es variable también lo será el flujo. Por ello se origina en la bobina una fuerza electromotriz de autoinducción, que debido al origen - que es el flujo creado por la propia bobina- constituye una reacción de la bobina sobre sí misma, por lo que recibe el nombre de *fuerza electromotriz de autoinducción.*

Como $B \propto i \quad ; \quad \Phi \propto B \quad \Rightarrow \quad \Phi \propto i$

Para convertir la proporción en igualdad utilizamos el coeficiente **L**, que se denomina *coeficiente de autoinducción o inductancia de la bobina*.

Se tiene que:

$$\Phi = L.i \qquad (10.7)$$

Si el flujo **Φ** pasa a **Φ + dΦ**, cuando la intensidad pasa de **i** a **i + di**, se induce en la bobina una fuerza electromotriz de autoinducción:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L.\frac{di}{dt} \qquad (10.8)$$

[1] El término "inductancia" fue empleado por primera vez por Oliver Heaviside en febrero de 1886

Esta es la expresión de la fuerza electromotriz de autoinducción.

Integrando (10.8) entre **0** e **i** y **0** y Φ, se tiene (10.7), por tanto:

$$L = \frac{\Phi}{i} \qquad (10.9)$$

Si en vez de una espira, la bobina tiene **n** espiras se obtiene:

$$L = \frac{n.\Phi}{i} \qquad (10.10)$$

La unidad de inductancia en el S.I., es el **Henrio.**

Decimos que un circuito tiene una inductancia de un henrio, si al ser recorrido por una corriente variable de un amperio por segundo, se induce en él una fuerza electromotriz de un voltio.

10.5. ENERGÍA ASOCIADA A UNA AUTOINDUCCIÓN.

Sea una autoinducción **L** en serie con una resistencia **R,** conectadas mediante un interruptor **K** a una fuente de corriente continua **E.**

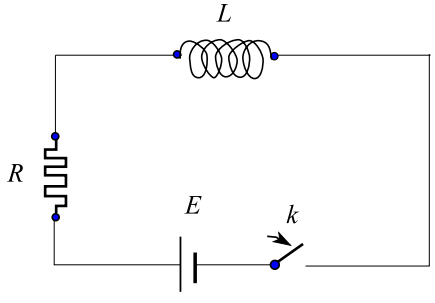


Fig. 10.3

Cuando se cierra el interruptor **k**, la corriente debido a la existencia de la fuerza electromotriz de autoinducción, tarda un tiempo en establecerse en el circuito. Designemos por **i** la intensidad de la corriente en el instante **t** durante el período de crecimiento, y por **i + di** su valor en el instante **t +dt**.

La ley de Ohm generalizada y aplicada al circuito de la Fig. 10.3 en el instante **t**, da:

$$E - L.\frac{di}{dt} = R.i \qquad (10.11)$$

$$L.\frac{di}{dt} + R.i = E \qquad (10.12)$$

Multiplicando (10.12) por **i.dt** resulta:

$$L.i.di + R.i^2.dt = E.i.dt \qquad (10.13)$$

Donde:

E.i.dt : Energía suministrada por la fuente.

R.i^2.dt : Energía transformada en forma de calor en la resistencia **R**.

L.i.dt : Energía que, si la corriente aumenta, es absorbida por **L** en **dt**.

Si la corriente varía de **0** a $\mathbf{i_o}$, la energía absorbida por **L** será:

$$W = \int_0^{i_0} L.i.di = \frac{1}{2}.L.i_0^2 \qquad (10.14)$$

10.6. RELACIÓN ENTRE AUTOINDUCCIÓN E INDUCTANCIA MUTUA.

Dentro de este apartado vamos a estudiar dos casos:

1º.- Acoplamiento perfecto. Sean dos bobinas **A** y **B**, con $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$ espiras, respectivamente. Supongamos que dichas bobinas tienen un circuito magnético común con una reluctancia $\mathfrak{R}$, dispuesta de tal modo que todo el flujo engendrado por una de ellas es abrazado por la otra. En estas circunstancias se tiene:

M: Flujo total debido a **A** y abrazado por B, cuando la corriente en **A** es la unidad.
F_1: Fuerza magnetomotriz creada por **A**.

$$M = \frac{n_2.\Phi}{1} = n_2.\frac{F_1}{\mathfrak{R}} = n_2.\frac{n_1.1}{\mathfrak{R}} = \frac{n_1.n_2}{\mathfrak{R}} \qquad (10.15)$$

Ahora bien, para las autoinducciones $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$ de **A** y **B**, cuando la corriente que circula por ellas es de un amperio, tenemos:

$$L_1 = \frac{n_1.\Phi}{1} = n_1.\frac{F_1}{\mathfrak{R}} = n_1.\frac{n_1.1}{\mathfrak{R}} = \frac{n_1^2}{\mathfrak{R}}$$

$$L_2 = \frac{n_2.\Phi}{1} = n_2.\frac{F_2}{\mathfrak{R}} = n_2.\frac{n_2.1}{\mathfrak{R}} = \frac{n_2^2}{\mathfrak{R}} \qquad (10.16)$$

Combinando (10.15) con (10.16), resulta:

$$M = \frac{\sqrt{L_1.\Re}.\sqrt{L_2.\Re}}{\Re} = \sqrt{L_1.L_2} \qquad (10.17)$$

2º.- Acoplamiento imperfecto. Sólo una fracción del flujo total engendrado en **A** es abrazado por **B**, y recíprocamente. Se tiene:

$$|M| < n_2.\Phi \quad ó \quad |M| < \frac{n_1.n_2}{\Re}$$
$$|M| < \sqrt{L_1.L_2} \qquad (10.18)$$

Vemos que al desplazarse la bobina **B** en relación con **A**, se hace variar el flujo común a ambas, por consiguiente, su coeficiente de inducción mutua. Cuando **M** tiene un valor elevado se dice que el acoplamiento es *ajustado* y, en caso contrario, que está *desajustado*. La relación:

$$\frac{|M|}{\sqrt{L_1.L_2}} \qquad (10.19)$$

determina el grado de acoplamiento de las dos bobinas.

Este grado de acoplamiento es sensiblemente igual a la unidad cuando las bobinas tienen el mismo núcleo.

10.7. MODIFICACIÓN DE LA INDUCTANCIA GLOBAL DE DOS CIRCUITOS EN SERIE: VARIÓMETRO.

Sean dos bobinas **A** y **B** recorridas por la misma corriente **i** y en el mismo sentido. Designamos por:

L_1: Coeficiente de autoinducción de la bobina **A.**
L_2: Coeficiente de autoinducción de la bobina **B.**
M: Coeficiente de inducción mutua de las dos bobinas.

Vamos a considerar dos casos:

a) El flujo de inducción mutua se suma en cada una de las dos bobinas a su propio flujo. En este caso el flujo total engendrado y abrazado por el conjunto de las dos bobinas es:

$$\Phi_1 = (L_1.i + M.i) + (L_2.i + M.i) = (L_1 + L_2 + 2.M).i$$

y la inductancia del conjunto es :

$$M' = L_1 + L_2 + 2.M \qquad (10.20)$$

b) El flujo de inducción mutua en cada una de las dos bobinas es de sentido opuesto a su propio flujo. En este caso el flujo total engendrado y abrazado por el conjunto de las dos bobinas es:

$$\Phi_2 = (L_1.i - M.i) + (L_2.i - M.i) = (L_1 + L_2 - 2.M).i$$

y la inductancia del conjunto es :

$$M'' = L_1 + L_2 - 2.M \qquad (10.21)$$

Por tanto el coeficiente de autoinducción de dos bobinas en serie es:

$$M' = L_1 + L_2 + 2.M \quad ó \quad M'' = L_1 + L_2 - 2.M \qquad (10.22)$$

Según su conexión.

Estas consideraciones encuentran aplicación en el *variómetro*, conjunto de dos bobinas conectadas en serie y capaces de girar una en relación con la otra. Según su posición relativa, el coeficiente de autoinducción del sistema varía entre **M'** y **M''**.

Añadamos que cuando se quiere anular la inductancia de una bobina, se enrollan en sentido contrario capas idénticas de hilo.

Designando por $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$ las inductancias respectivas del conjunto de capas pares e impares (acoplamiento perfecto), la inductancia de la bobina se convierte en:

$$L = L_1 + L_2 - 2.M = L_1 + L_2 - 2.\sqrt{L_1.L_2} = (\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 \qquad (10.23)$$

Por tanto cuando $\mathbf{L_1 = L_2}$, la inductancia del conjunto es nula **(L = 0)**

10.8. EFECTOS DE UN CIRCUITO CERRADO SIN FUERZA ELECTROMOTRIZ PROPIA SOBRE LA INDUCTANCIA MUTUA.

Sea la figura 10.4 en que **(1)** es un circuito en el cual una fuerza electromotriz variable produce una corriente $\mathbf{i_1}$, y un circuito cerrado **(2)** sin fuerza electromotriz abraza una parte del flujo del circuito **(1)**.

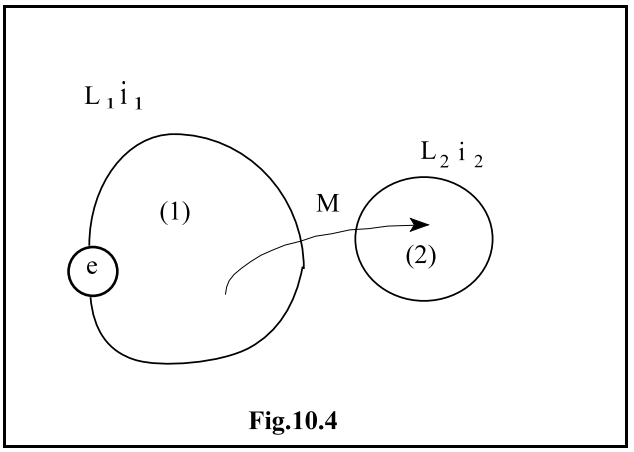


Fig.10.4

Designamos por $\mathbf{L_1}$ y $\mathbf{L_2}$ las inductancias de los circuitos **(1)** y **(2)**, respectivamente, y por **M**, su inductancia mutua. Hay que demostrar:

1º.- En el circuito (1) la fuerza electromotriz de inducción mutua es siempre del mismo sentido que la fuerza electromotriz de autoinducción.

En efecto, la corriente $\mathbf{i_2}$ es una corriente inducida por el flujo $\Phi_{1.2}$ del circuito **(1)**. La corriente reacciona contra toda variación de éste flujo, como lo hace la fuerza electromotriz de autoinducción del circuito **(1)**. Es decir, que en el circuito **(1)** la fuerza electromotriz de inducción mutua, debida a un circuito cerrado sin fuerza electromotriz propia **(2)**, tiene el mismo sentido que la fuerza electromotriz de autoinducción del circuito **(1)**.

Las expresiones de las dos fuerzas electromotrices son:

$$e_{11} = - L_1.\frac{di_1}{dt} \qquad e_{21} = - M.\frac{di_2}{dt} \tag{10.24}$$

2º.- El circuito cerrado sin fuerza electromotriz propia ha hecho disminuir el valor de la inductancia del circuito al que está acoplado magneticamente.

Designamos por $\mathbf{e}_1$ la fuerza electromotriz aplicada al circuito **(1)** en el instante **t**; por $\mathbf{i}_1$ la corriente en el mismo circuito; por $\mathbf{i}_2$ la corriente en el circuito **(2)** y se desprecia la resistencia de ambos circuitos. Aplicamos a cada uno de ellos, en el instante **t**, la Ley de Ohm generalizada:

$$\begin{aligned} e_1 &= L_1.\frac{di_1}{dt} + M.\frac{di_2}{dt} \\ 0 &= M.\frac{di_1}{dt} + L_2.\frac{di_2}{dt} \end{aligned} \tag{10.25}$$

Multiplicamos la primera ecuación de (10.25) por $\mathbf{L}_2$ y la segunda por **M**.

$$\begin{aligned} e_1.L_2 &= L_1.L_2.\frac{di_1}{dt} + M.L_2.\frac{di_2}{dt} \\ 0 &= M^2.\frac{di_1}{dt} + L_2.M.\frac{di_2}{dt} \end{aligned} \tag{10.26}$$

Restando las ecuaciones de (10.26) miembro a miembro:

$$e_1.L_2 = L_1.L_2.\frac{di_1}{dt} + M.L_2.\frac{di_2}{dt} - M^2.\frac{di_1}{dt} - L_2.M.\frac{di_2}{dt} \tag{10.27}$$

Despejando $\mathbf{e_1}$:

$$e_1 = (L_1 - \frac{M^2}{L_2}).\frac{di_1}{dt} \qquad (10.28)$$

Luego la presencia del circuito cerrado sobre sí mismo **(2)**, hace que la inductancia $\mathbf{L_1}$ quede sustituida por la inductancia $\mathbf{L_1 - M^2/L_2}$, que recibe el nombre de *inductancia de pérdidas totales.*

10.9. ENERGÍA POTENCIAL DE DOS CIRCUITOS EN ESTADO DE INDUCTANCIA MUTUA.

Sean dos circuitos según se representan en la figura 10.5

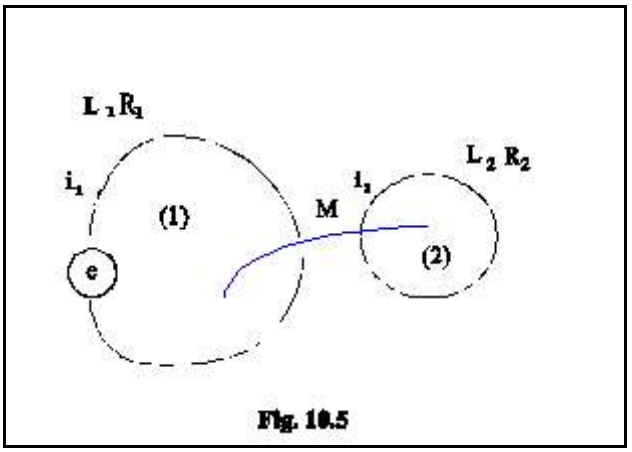


Fig. 10.5

Cada uno de ellos con resistencia y autoinducción; de los cuales, solo el primero está sometido a una fuerza electromotriz, **E**. La inductancia mutua de los dos circuitos es **M**. Apliquemos la ley de Ohm generalizada a ambos circuitos, que están recorridos por corrientes $\mathbf{i_1}$ e $\mathbf{i_2}$.

$$\begin{aligned} E - L_1.\frac{di_1}{dt} - M.\frac{di_2}{dt} &= R_1.i_1 \\ - M.\frac{di_1}{dt} - L_2.\frac{di_2}{dt} &= R_2.i_2 \end{aligned} \qquad (10.29)$$

Multiplicando las ecuaciones de (10.29) por $\mathbf{i_1}$ e $\mathbf{i_2}$, respectivamente:

$$\begin{aligned} E.i_1 - L_1.i_1.\frac{di_1}{dt} - M.i_1.\frac{di_2}{dt} &= R_1.i_1^2 \\ - M.i_2.\frac{di_1}{dt} - L_2.i_2.\frac{di_2}{dt} &= R_2.i_2^2 \end{aligned} \qquad (10.30)$$

Operando (10.30), resulta:

$$E.i_1 - \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.L_1.i_1^2) - M.i_1.\frac{di_2}{dt} = R_1.i_1^2$$
$$- M.i_2.\frac{di_1}{dt} - \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.L_2.i_2^2) = R_2.i_2^2 \qquad (10.31)$$

Sumando las ecuaciones de (10.31) miembro a miembro, resulta:

$$E.i_1 - R_1.i_1^2 - R_2.i_2^2 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.L_1.i_1^2) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.L_2.i_2^2) + M.i_1.\frac{di_2}{dt} + M.i_2.\frac{di_1}{dt} \qquad (10.32)$$

$$E.i_1 - R_1.i_1^2 - R_2.i_2^2 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.L_1.i_1^2) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.L_2.i_2^2) + \frac{d}{dt}(M.i_1.i_2) \qquad (10.33)$$

$$E.i_1 - R_1.i_1^2 - R_2.i_2^2 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.L_1.i_1^2 + \frac{1}{2}.L_2.i_2^2 + M.i_1.i_2) \qquad (10.34)$$

En la que:

$E.i_1$	Potencia generada por la fuente.
$R_1.i_1^2$	Potencia transformada en calor en el circuito (1).
$R_2.i_2^2$	Potencia transformada en calor en el circuito (2).
$1/2.L_1.i_1^2$	Energía almacenada en L_1
$1/2.L_2.i_2^2$	Energía almacenada en L_2
$M.i_1.i_2$	Energía almacenada en la inducción mutua.

En el caso que una de los dos circuitos sea móvil, cambiará su posición relativa y por tanto **M** variará.

En un aparato electromagnético, la bobina móvil gira alrededor de su eje debido al par motor $\boldsymbol{\Gamma_m}$. El trabajo desarrollado por el par motor cuando gira un ángulo $\mathbf{d\theta}$ a partir de $\boldsymbol{\theta}$, queda compensado con la energía que se acumula en la inductancia mutua, es decir, se verifica:

$$\Gamma_m.d\theta = i_1.i_2.dM$$

$$\Gamma_m = i_1.i_2.\frac{dM}{d\theta} \qquad (10.35)$$