TEMA 12

REGÍMENES TRANSITORIOS I

12.1. DESCARGA DE UN CONDENSADOR.

La ecuación general que define la descarga en un condensador en un circuito **R**, **L** y **C**, constituye un caso particular de sistemas de descarga más generales.

En este caso aparecen de forma destacada las *piezas elementales* de fenómenos de descarga.

Se parte del circuito de la Fig. 12.1 en el cual, el condensador **C**, posee una carga inicial $\mathbf{Q_o}$ y en un instante determinado se conecta a un circuito con resistencia **R**, e inductancia **L** (se cierra el interruptor **k** en el instante **t = 0**).

La tensión entre las armaduras del condensador en el instante inicial es: $U_0 = \frac{Q_0}{C}$

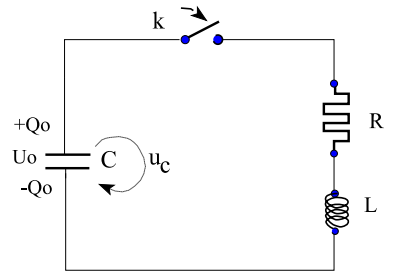


Fig.12.1

A partir del cierre del interruptor, se verifica:

$$u_c = u_L + u_R \qquad (12.1)$$

Ahora bien, en el circuito de la Fig.12.1 se verifica:

$$u_R = i.R \quad ; \quad u_L = L.\frac{di}{dt} \tag{12.2}$$

Sustituyendo (12.2) en (12.1), resulta:

$$u_c = L.\frac{di}{dt} + i.R \tag{12.3}$$

Pero:

$$u_c = U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t idt \tag{12.4}$$

Sustituyendo (12.4) en (12.3), resulta:

$$U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t idt - L.\frac{di}{dt} - R.i = 0 \tag{12.5}$$

Derivando la ecuación integro-diferencial (12.5), con respecto al tiempo y dividiendo por **L**, resulta:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}.i = 0$$

Llamando:

$$\frac{R}{L} = 2a = \delta = \frac{1}{\tau} \quad ;$$

δ = Coeficiente de amortiguamiento.

τ = Constante de tiempo.

$$\frac{1}{LC} = \omega_r^2$$

Obtenemos una ecuación diferencial homogénea de segundo grado:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2a.\frac{di}{dt} + \omega_r^2.i = 0 \tag{12.6}$$

Además:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

es la *frecuencia angular de resonancia*, que se correspondería con la pulsación de una fuerza electromotriz senoidal para la cual el circuito entraría en resonancia.

La ecuación característica, de la ecuación diferencial homogénea (12.6), es:

$$\alpha^2 + 2a\alpha + \omega_r^2 = 0 \qquad (12.7)$$

Cuya solución es:

$$\alpha = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_r^2} \qquad (\qquad \alpha_1 \text{ y } \alpha_2)$$

Las raíces α_1 y α_2, de acuerdo con el signo del discriminante, pueden ser:

Sí $a^2 - \omega_r^2 > 0$, ambas reales distintas.
" $a^2 - \omega_r^2 < 0$, ambas complejas conjugadas.
" $a^2 - \omega_r^2 = 0$, ambas reales iguales.

Como casos particulares se van a estudiar,

L = 0 (Descarga de un condensador en una resistencia)
R = 0 (Descarga de un condensador en una autoinducción)

12.2. DESCARGA DE UN CONDENSADOR EN UN CIRCUITO SIN AUTOINDUCCIÓN.

Se trata de la descarga de un condensador en una resistencia. El circuito es ideal, ya que la autoinducción de un circuito puede ser muy pequeña, pero nunca nula.

La ecuación del circuito, en este supuesto, es:

$$U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt - R.i = 0 \qquad (12.8)$$

Derivando la ecuación integro-diferencial (12.8), tenemos:

$$-\frac{1}{C}.i = R.\frac{di}{dt}$$

Separando variables:

$$-\frac{di}{i} = \frac{dt}{RC}$$

Integrando:

$$-\ln i = \frac{t}{RC} + K \qquad (12.9)$$

Para calcular **K**, recurrimos a las condiciones iniciales:

$$(i)_{t=0} = \frac{U_0}{R}$$

$$K = -\ln i_0 \qquad (12.10)$$

Sustituyendo (12.10) en (12.9), tenemos:

$$-\ln i + \ln i_0 = \frac{t}{RC}$$

$$\ln i - \ln i_0 = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{i}{i_0}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Tomando antilogaritmos:

$$i = i_0 . e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (12.11)$$

o bien:

$$i = \frac{U_0}{R} . e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (12.12)$$

Siendo **τ= R.C** la *constante de tiempo* o *tiempo de relajación del circuito*.

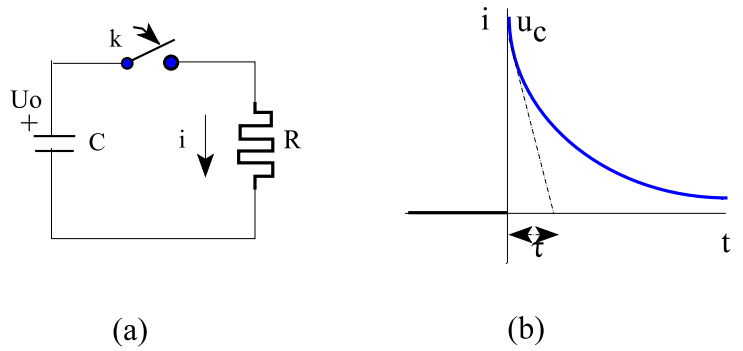
La diferencia de potencial en bornes del condensador se define por la expresión:

$$u_c = R.i$$

Y en consecuencia:

$$u_c = U_0 . e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (12.13)$$

La Fig.12.2 (b), representa la tensión en bornes del condensador y la corriente en la resistencia, en función del tiempo.



(a) (b)

Fig.12.2

En este caso la corriente es discontinua y presenta un salto en el origen. No se cumple una afirmación del electrotécnico: *"La corriente i(t) es una función continua"*. Esto es debido al hecho de suponer que el circuito careciese de inductancia. En todos los casos en que esto no suceda (los circuitos reales), no se producirá un salto en el origen.

Además la subtangente en el origen coincide con la constante de tiempo [1]. En efecto, de la figura 12.2, se tiene:

$$S_t = -\left(\frac{dt}{di}\right)_{t=0} i_0 \qquad (12.14)$$

Derivando (12.14):

$$di = i_0.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}.dt \quad ; \quad \left(\frac{dt}{di}\right)_{t=0} = \left[-\frac{\tau}{i_0.e^{-\frac{t}{\tau}}}\right]_{t=0} \qquad (12.15)$$

Sustituyendo (12.15) en (12.14):

$$S_t = \frac{\tau}{i_0}.i_0 = \tau \qquad (12.16)$$

[1] Esto significa que, para pequeños valores de la constante de tiempo, τ, la curva de descarga decrece de forma rápida. En la práctica, para tiempos equivalentes a unas cinco veces la constante de tiempo, la intensidad no alcanza ni el 1 % de su valor inicial, con lo que puede suponerse que ha concluido el proceso de descarga.

12.3. DESCARGA DE UN CONDENSADOR EN UN CIRCUITO SIN RESISTENCIA.

Como en el caso anterior, se trata de un caso ideal. La resistencia puede ser muy pequeña pero nunca nula. El resultado es una descarga "*no amortiguada*".

Al ser nulo el valor de **R**, implica que **a** también lo es, y la ecuación del circuito (12.6), se reduce a:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_r^2.i = 0 \qquad (12.17)$$

Las raíces de la ecuación característica (12.17), son:

$$\alpha_1 = j\omega_r$$

$$\alpha_2 = -j\omega_r$$

La solución general de la ecuación diferencial homogénea de segundo grado (12.14) es:

$$i = e^{0t}.(A_1.e^{j\omega_r.t} + A_1.e^{-j\omega_r.t}) \qquad (12.18)$$

$$i = e^{0t}.[A_1.(\cos\omega_r.t + j.sen\,\omega_r.t) + A_2.(\cos\omega_r.t - j.sen\,\omega_r.t)]$$

$$i = e^{0t}.[(A_1 + A_2).\cos\omega_r.t + j.(A_1 - A_2).sen\,\omega_r.t] \qquad (12.19)$$

Haciendo:

$$K_1 = A_1 + A_2 \;\; ; \;\; K_2 = j.(A_1 - A_2) \qquad (12.20)$$

Sustituyendo (12.20) en (12.19), resulta:

$$i = K_1.\cos\omega_r.t + K_2.sen\,\omega_r.t \qquad (12.21)$$

Para determinar las constantes $\mathbf{K_1}$ y $\mathbf{K_2}$, recurrimos a las condiciones iniciales [2]:

$$\left.\begin{array}{l} i = 0 \\ u_c = U_0 \end{array}\right\} K_1 = 0$$

[2] Las constantes se pueden hallar por aplicación de las condiciones iniciales, ya que existe una continuidad en la variación de las funciones que definen la intensidad **i** y la tensión $\mathbf{u_c}$. Lo anterior es debido a que no es posible la transferencia de energía con potencia infinita, entre el condensador y la inductancia.

Por tanto (12.21) se reduce a la expresión siguiente:

$$i = K_2.sen\omega_r.t \qquad (12.22)$$

Para calcular $\mathbf{K_2}$, recurrimos a las condiciones iniciales en la ecuación del circuito (12.3):

$$(u_c)_{t=0} = L.(\frac{di}{dt})_{t=0} = L.(K_2.\omega_r.\cos\omega_r t)_{t=0}$$

$$K_2 = \frac{U_0}{L\omega_r}$$

Finalmente, la expresión que define la intensidad **i,** es:

$$i = \frac{U_0}{L\omega_r}.sen\omega_r t \qquad (12.23)$$

La expresión que define la tensión en bornes del condensador $\mathbf{u_c}$, es:

$$u_c = L.\frac{di}{dt} = L.\frac{U_0}{L\omega_r}.\omega_r.\cos\omega_r t$$

$$u_c = U_0.\cos\omega_r t = U_0.sen(\omega_r t + \frac{\pi}{2}) \qquad (12.24)$$

Se trata de un proceso ideal ilimitado de descargas y cargas del condensador.

La energía presente en el circuito en cualquier instante es igual a la suma de la que se encuentra presente en el condensador y en la inductancia. Por tanto será:

$$W_t = \frac{1}{2}.L.i^2 + \frac{1}{2}.C.u_c^2$$

Sustituyendo los valores de **i** y $\mathbf{U_c}$, obtenidos en (12.23) y (12.24), resulta:

$$W_t = \frac{1}{2}.L.\frac{U_0^2}{L.\omega_r^2}.sen^2\omega_r t + \frac{1}{2}.C.U_0^2\cos^2\omega_r t$$

Teniendo en cuenta que,

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC}$$

Resulta:

$$W_t = \frac{1}{2}.C.U_0^2 \qquad (12.25)$$

Que es la energía que inicialmente poseía el condensador. En definitiva, el balanceo de la energía se establece entre el campo eléctrico del condensador y el electromagnético de la autoinducción, para la frecuencia de oscilación $\boldsymbol{\omega_r}$.

En la Fig. 12.3 (b), se ven los valores que toman, en el tiempo, la intensidad y la tensión en bornes del condensador en el proceso de descarga. Como puede apreciarse es un proceso indefinido.

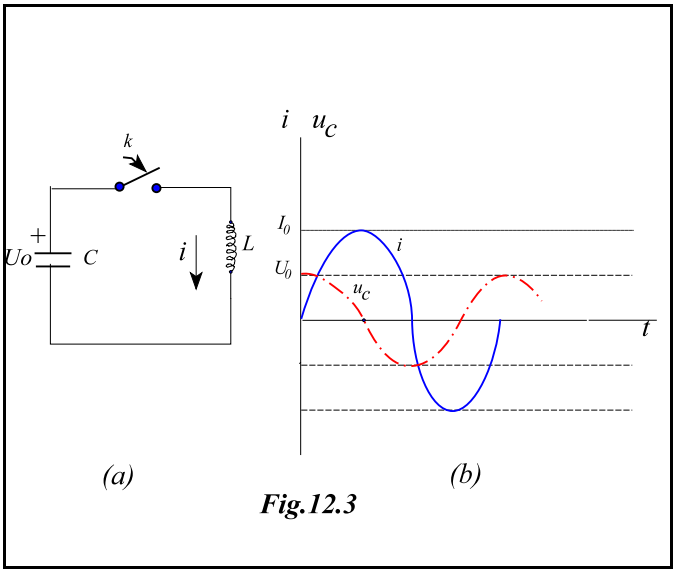


Fig.12.3