PROHIBIDA SU PUBLICACIÓN



**TEMA 13**

# REGÍMENES TRANSITORIOS II

## 13.1 CASO DE RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS: $a^2 - \omega_r^2 < 0$. CIRCUITO OSCILANTE AMORTIGUADO, O CIRCUITO SUBAMORTIGUADO.

La descarga de un condensador en un circuito sin resistencia se corresponde con el presente caso, cuando la parte real de las dos raíces de la ecuación característica es nula.

En este caso general, las raíces de la ecuación (12.7), son:

$$\alpha_1 = -a + \sqrt{a^2 - \omega_r^2} = -a + j.\omega_0$$

$$\alpha_2 = -a - \sqrt{a^2 - \omega_r^2} = -a - j.\omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_r^2 - a^2} < \omega_r$$

Luego :

$$f_0 < f_r \quad o\ bien \quad T_0 > T_r$$

Siendo:

$f_o$ = Frecuencia natural del circuito.

La solución de la ecuación diferencial homogénea (12.6), es:

$$i = A_1.e^{(-at+j\omega_0 t)} + A_2.e^{(-at-j\omega_0 t)} \qquad (13.1)$$

Sacando $e^{-at}$ factor común en (13.1), resulta:

$$i = e^{-at}\,(A_1.e^{j\omega_0 t} + A_2.e^{-j\omega_0 t})$$

Operando:

$$i = e^{-at}\ [A_1.(\cos\omega_0 t + j.sen\omega_0 t) + A_2.(\cos\omega_0 t - j.sen\omega_0 t)]$$

$$i = e^{-at}\ [(A_1 + A_2).\cos\omega_0 t + j(A_1 - A_2).sen\omega_0 t] \qquad (13.2)$$

Haciendo en (13.2):

$$K_1 = A_1 + A_2 \quad y \quad K_2 = j(A_1 - A_2)$$

La ecuación (13.2) se reduce a:

$$i = e^{-at}[K_1.\cos\omega_0 t + K_2.sen\omega_0 t] \qquad (13.3)$$

Para calcular $\mathbf{K_1}$ y $\mathbf{K_2}$ recurrimos a las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} i = 0 \\ t = 0 \\ u_c = U_0 \end{array}\right\} \quad K_1 = 0$$

Luego (13.3) se reduce a:

$$i = e^{-at}\ K_2.sen\omega_0 t \qquad (13.4)$$

Derivando (13.4) con respecto al tiempo:

$$\frac{di}{dt} = -a.e^{-at}\ K_2.sen\omega_0 t + e^{-at}\ K_2.\omega_0.\cos\omega_0 t$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = K_2.\omega_0$$

Particularizando la ecuación general (12.5) para **t=0**, y teniendo en cuenta lo anterior:

$$U_0 = LK_2.\omega_0 \quad ; \quad K_2 = \frac{U_0}{L\omega_0}$$

La ecuación que define **i,** se convierte en:

$$i = \frac{U_0}{L\omega_0}.e^{-at}.sen\omega_0 t \qquad (13.5)$$

La descarga corresponde a una senoide amortiguada, de ahí la denominación del circuito.

Para determinar la ecuación de la tensión en bornes del condensador, partimos de la expresión:

$$u_c = R.i + L.\frac{di}{dt} \qquad (13.6)$$

Empezamos por derivar (13.5) con respecto al tiempo:

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L\omega_0}.e^{-at}.\omega_0.\cos\omega_0 t - \frac{U_0.a}{L\omega_0}.e^{-at}.sen\,\omega_0 t \qquad (13.7)$$

y sustituimos (13.5) y (13.7) en (13.6), con lo que resulta:

$$u_c = R.\frac{U_0}{L\omega_0}.e^{-at}.sen\,\omega_0 t + L.\frac{U_0}{L\omega_0}.e^{-at}.\omega_0.\cos\omega_0 t - \frac{U_0.L.a}{L\omega_0}.e^{-at}.sen\,\omega_0 t$$

Operando (13.8), resulta:

$$u_c = \frac{U_0}{L\omega_0}.e^{-at}.[(R - L.a).sen\,\omega_0 t + L\omega_0.\cos\omega_0 t] \qquad (13.9)$$

Hacemos en (13.9) el cambio:

$$u_c = \frac{U_0}{L\omega_0}.e^{-at}.sen(\omega_0 t + \varphi) \qquad (13.10)$$

Desarrollando (13.10) resulta:

$$u_c = \frac{U_0}{L\omega_0}.e^{-at}\,(\cos\varphi.sen\,\omega_0 t + sen\,\varphi.\cos\omega_0 t) \qquad (13.11)$$

Identificando (13.9) con (13.11), resulta:

$$\cos\varphi = R - L.a \;\; ; \;\; sen\,\varphi = \omega_0 L$$

$$tang\,\varphi = \frac{\omega_0 L}{R - L.a} = \frac{\omega_0}{\frac{R}{L} - a} = \frac{\omega_0}{a}$$

La ecuación (13.10) se puede expresar:

$$u_c = \frac{U_0}{L\omega_0}.e^{-at}\ (sen\,\omega_0 t + tang^{-1}\ \frac{\omega_0}{a}) \qquad (13.12)$$

La ecuación (13.12) define la tensión en bornes del condensador. Si comparamos esta ecuación con la (13.5) vemos que ambas tienen la misma amplitud y frecuencia angular, pero la tensión está adelantada un ángulo φ con respecto a la intensidad.

La figura 13.1 representa la descarga del condensador (13.5) [1].

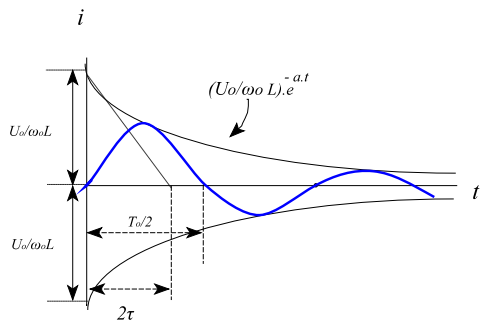



*Fig.13.1*

## 13.2 CASO DE RAÍCES REALES: $a^2 - \omega_r^2 > 0$ . DESCARGA APERIÓDICA O CIRCUITO SOBREAMORTIGUADO.

En este caso las raíces de la ecuación (12.7) son reales distintas:

$$\alpha_1 = -a + \sqrt{a^2 - \omega_r^2} = -a + \omega'_0$$

$$\omega'_0 = \sqrt{a^2 - \omega_r^2}$$

$$\alpha_2 = -a - \sqrt{a^2 - \omega_r^2} = -a - \omega'_0$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea (12.6) es:

$$i = A_1.e^{\alpha_1 t} + A_2.e^{\alpha_2 t} \qquad (13.13)$$

Ahora bien:

$a > 0$

$\omega_o' < a$

$\omega_o' > 0$

[1] En este tipo de descargas, la frecuencia angular de la oscilación, $\omega_0$, es menor que la de resonancia, $\omega_r$, y en consecuencia el período natural del circuito es mayor que la resonancia, $T_r$. Esto significa que en circuitos con valores de capacidad y autoinducción constantes, un aumento de la resistencia, **R**, incrementa el período natural, $T_0$, dando lugar a amortiguamientos mayores.

Por tanto $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son negativos. Verificándose:

$$*\alpha_2* > a > *\alpha_1*$$

El signo negativo de los exponentes es característico y establece el carácter amortiguado del proceso. Se trata de la suma de dos exponenciales decrecientes.

Para determinar $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, estudiamos las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} i = 0 \\ t = 0 \\ u_c = U_0 \end{array}\right\} \quad A_1 + A_2 = 0 \;\; ; \;\; A_1 = -A_2 \tag{13.14}$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \tag{13.15}$$

Resolviendo (13.14) y (13.15), resulta:

$$A_1 = -A_2$$

$$\frac{U_0}{L} = -\alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_2 = -A_2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$A_1 = -A_2 = \frac{U_0}{L(\alpha_1 - \alpha_2)} \tag{13.16}$$

Pero :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\omega'_0 \tag{13.17}$$

Sustituyendo (13.17) en (13.16), resulta:

$$A_1 = -A_2 = \frac{U_0}{2L\omega'_0} \tag{13.18}$$

Sustituyendo (13.18) en (13.13), resulta:

$$i = \frac{U_o}{2L\omega'_0} e^{\alpha_1 t} - \frac{U_o}{2L\omega'_0} e^{\alpha_2 t} \tag{13.19}$$

Finalmente si sustituimos $\alpha_1$ y $\alpha_2$ en (13.19) por sus valores, resulta:

$$i = \frac{U_o}{2.\omega'_0 L}.[e^{-at+\omega'_0 t} - e^{-at-\omega'_0 t}] = \frac{U_0}{\omega'_0 L}.e^{-at}.[\frac{e^{\omega'_0 t} - e^{-\omega'_0 t}}{2}]$$

$$i = \frac{U_0}{L\omega'_0}.e^{-at}\ Senh(\omega'_0 t) \qquad (13.20)$$

Se trata, en definitiva, de un seno hiperbólico amortiguado.

La Fig.13.2 representa la ecuación de la intensidad (13.20)

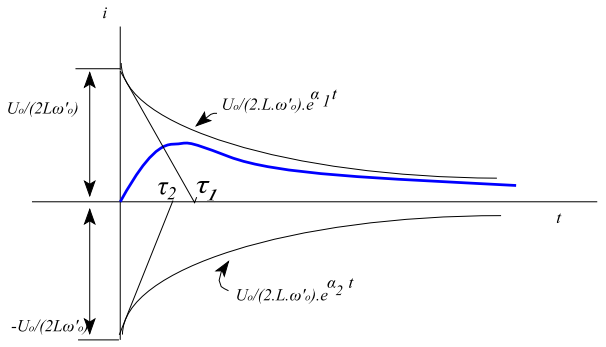



*Fig.13.2*

## 13.3 CASO LIMITE O CRITICO $a^2 - \omega_r^2 = 0$

Es el caso frontera de los dos precedentes.

Las raíces dobles de la ecuación (12.7) son:

$$\alpha_1 = -a \quad y \quad \alpha_2 = -a$$

La solución de la ecuación diferencial (12.6) es:

$$i = A_1.e^{-at} + A_2.t.e^{-at} = e^{-at}\ (A_1 + t.A_2) \qquad (13.21)$$

Para calcular $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$, estudiamos las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} i = 0 \\ t = 0 \\ u_c = U_0 \end{array}\right\} \quad A_1 = 0 \ ; \ i = A_2.t.e^{-at} \qquad (13.22)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (13.22), resulta:

$$\frac{di}{dt} = A_2.e^{-at} + A_2.t.(-a).e^{-at} \qquad (13.23)$$

Particularizando (13.23) para t = 0, resulta:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = A_2$$

En consecuencia, particularizando la ecuación principal (12.5) para **t=0**, resulta:

$$L.A_2 = U_o \;\; ; \;\; A_2 = \frac{U_0}{L} \qquad (13.24)$$

Sustituyendo (13.24) en (13.22) resulta:

$$i = \frac{U_0}{L}.t.e^{-at} \qquad (13.25)$$

En este caso la frecuencia angular $\omega_o$ es nula, lo que implica que la frecuencia natural del circuito también lo es. El período natural es, evidentemente, infinito.

Para la determinación de la tensión en bornes del condensador, partimos de la ecuación:

$$u_c = L.\frac{di}{dt} + R.i \qquad (13.26)$$

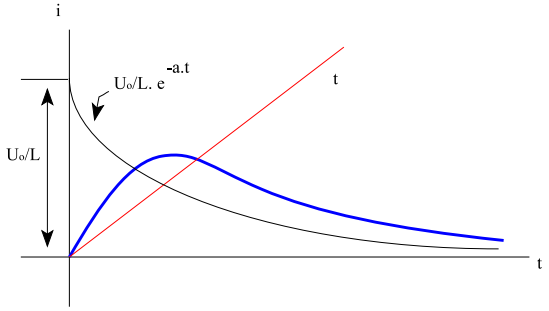



**Fig.13.3**

Derivando (13.25) con respecto al tiempo:

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L}.e^{-at} - \frac{U_0}{L}.t.a.e^{-at} \qquad (13.27)$$

y sustituyendo (13.25) y (13.27) en (13.26), resulta:

$$u_c = L.[\frac{U_0}{L}.e^{-at} - \frac{U_0}{L}.t.a.e^{-at}] + R.\frac{U_0}{L}.t.e^{-at}$$

Operando:

$$u_c = \frac{U_0}{L}.e^{-at}[L + t.(R-L.a)] = \frac{U_0}{L}.e^{-at}[L + \frac{R}{2}.t] \qquad (13.28)$$

La función **i** de (13.25) puede hallarse partiendo de la ecuación (13.20) de la descarga aperiódica y considerando $\omega_0'$ cero. Hay que tener cuidado, pues para obtener el valor de la intensidad, hay que desarrollar en serie el seno hiperbólico.

Desarrollando en serie el seno hiperbólico, resulta:

$$Senh(\omega'_0 t) = \frac{e^{\omega'_0 t} - e^{-\omega'_0 t}}{2} = \omega'_0 t + \frac{\omega'^3_0 t^3}{3!} + \frac{\omega'^5_0 t^5}{5!} + .....$$

Tomando límites en (13.20) resulta:

$$i = \lim_{\omega'_0 \to 0} \frac{U_0}{\omega'_0 L}.e^{-at}.Senh\ \omega'_0 t = \frac{U_0}{\omega'_0 L}.e^{-at} \lim \frac{Senh\omega'_0 t}{\omega'_0}$$

$$i = \frac{U_0}{L}.e^{-at}.\lim_{\omega'_0 \to 0} (t + \frac{\omega'^2_0 t^3}{3!} + \frac{\omega'^4_0 t^5}{5!} + ..... = \frac{U_0}{L}.t.e^{-at}$$

Que es la ecuación obtenida en (13.25).

Este amortiguamiento es límite, ya que si fuese algo mayor, tendríamos el sobreamortiguamiento, pero si fuese un poco menor pasaríamos a subamortiguamiento, entrando en un proceso oscilante.

## 13.4 DESCARGAS DE INDUCTANCIAS

La existencia de una intensidad inicial en el circuito formado por una inductancia en serie con una resistencia, la podemos obtener mediante el circuito de la Fig.13.4. En este circuito, el interruptor **k** permanece cerrado un tiempo suficientemente largo, con lo cual la intensidad que circula por la inductancia será $I_0 = \frac{E}{R'}$ , ya que la fuerza electromotriz de autoinducción se anula al cabo de un cierto tiempo.

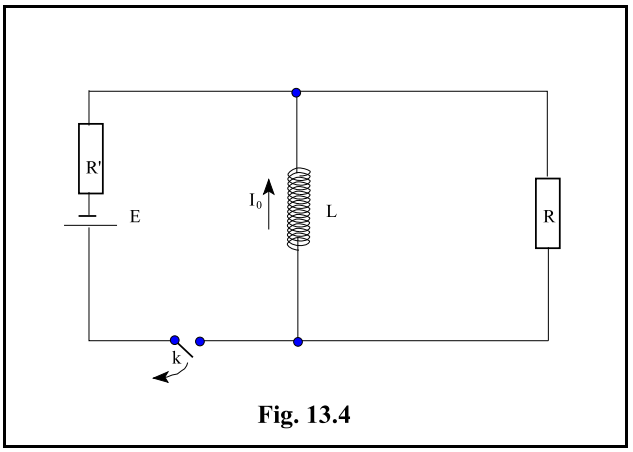


**Fig. 13.4**

En el instante **t=0**, se abre el interruptor **k**, con lo cual la autoinducción **L** queda conectada en serie con la resistencia **R**. A partir de este instante, se produce la descarga de la inductancia en la resistencia. La energía almacenada (de forma reversible) en la inductancia en forma de campo magnético, se transforma (de forma irreversible) en calor por Joule, en la resistencia **R**.

El proceso en definitiva consiste, en descargar en una resistencia **R**, la energía acumulada en una inductancia **L**.

La ecuación de descarga de la inductancia, es:

$$L.\frac{di}{dt} + R.i = 0 \qquad (13.29)$$

Separando variables:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}.dt \qquad (13.30)$$

Integrando (13.30), resulta:

$$\ln i = -\frac{R}{L}.t + K \qquad (13.28)$$

Para determinar **K** en (13.31), estudiamos las condiciones iniciales:

$$t = 0 \;\; ; \;\; i = i_0 \;\; \Rightarrow \;\; K = \ln i_0$$

$$\ln i - \ln i_0 = -\frac{R}{L}.t \quad ; \quad \ln\left(\frac{i}{i_0}\right) = -\frac{R}{L}.t$$

Tomando antilogaritmos:

$$i = i_0.e^{-\frac{R}{L}.t} \qquad (13.32)$$

Llamando constante de tiempo a **L/R = τ**, (13.32) la podemos expresar como:

$$i = i_0.e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (13.33)$$

La diferencia de potencial en bornes de la autoinducción, es:

$$u_L = R.i \qquad (13.34)$$

Sustituyendo (13.33) en (13.34), se tiene:

$$u_L = U_0.e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (13.35)$$

La representación gráfica de la ecuación (13.33) la tenemos en la Fig.13.5 [2]

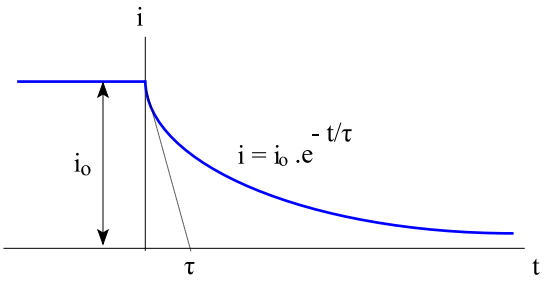



**Fig.13.5**

[2] Al igual que en el circuito R, L y C, la constante de tiempo se obtiene calculando la subtangente en el origen a la curva (13.33). Para un circuito con inductancia fija, L, cuanto mayor se el valor de la resistencia, R, más rápidamente se extinguirá el proceso de descarga.

## 13.5. DESCARGA EN REDES.

En los epígrafes anteriores, se han estudiado procesos de descarga en circuitos sencillos. En el presente epígrafe se estudiarán procesos de descarga en circuitos más complejos, es decir en redes.

Para concretar el desarrollo, se propone el circuito de la Fig.13.6. Este se considera a partir del instante en que se abre el interruptor **k**. En ese instante, tanto el condensador como la inductancia tienen energías almacenadas, el condensador en forma de campo eléctrico, y la inductancia en forma de campo electromagnético. Para ello se supone que el interruptor ha permanecido cerrado suficiente tiempo.

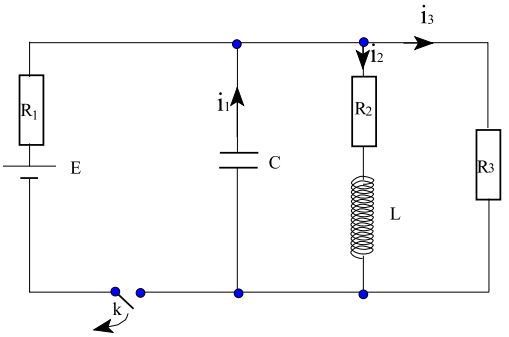



**Fig. 13.6**

En el instante de apertura del circuito, la energía presente en el sistema es:

En el condensador: $1/2.C.U_{0^2}$
En la inductancia: $1/2.L.I_{0^2}$
En las resistencias $R_2$ y $R_3$ no hay energía acumulada.

En el circuito de la Fig.13.6, para **t=0**, se verifica:

$$(i_2)_{t=0} = I_0 \quad ; \quad (u_c)_{t=0} = U_0 \tag{13.36}$$

Las ecuaciones que rigen las descargas en el circuito, se obtienen aplicando los lemas de Kirchhoff:

$$\left.\begin{aligned} U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i_1 dt &= R_3.i_3 \\ L.\frac{di_2}{dt} &= R_3.i_3 - R_2.i_2 \\ i_1 &= i_2 + i_3 \end{aligned}\right\} \tag{13.37}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones integro-diferenciales (13.37), se puede plantear el

mismo, perdiendo la información del instante inicial. En efecto[3]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1 dt + R_3.i_3 = 0 \\ &L.\frac{di_2}{dt} + R_2.i_2 - R_3.i_3 = 0 \\ &i_1 - i_2 - i_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13.38)$$

El sistema (13.38) es un sistema de ecuaciones homogéneo. Estos sistemas tienen soluciones del tipo:

$$i_1 = I_1 e^{q.t} \;\; ; \;\; i_2 = I_2 e^{q.t} \;\; ; \;\; i_3 = I_3 e^{q.t} \qquad (13.39)$$

Para determinar los valores $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$ e $\mathbf{I_3}$, se considera:

$$i = I.e^{q.t}$$

$$\frac{di}{dt} = q.I.e^{q.t} = q.i \qquad (13.40)$$

$$\int i dt = \frac{I.e^{q.t}}{q} = \frac{i}{q}$$

Según hemos visto en (13.40), el sistema (13.38) se reduce a:

$$\left.\begin{aligned} (1/qC).i_1 \quad &+ R_3.i_3 = 0 \\ (R_2 + q.L).i_2 \quad &- R_3.i_3 = 0 \\ i_1 \quad - i_2 \quad &- i_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (13.41)$$

En el supuesto de conocer **q**, se pueden calcular los valores de $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_2}$ e $\mathbf{i_3}$, resolviendo el sistema (13.41). Este sistema ofrece la solución $\mathbf{i_1 = 0; i_2 = 0; i_3 = 0}$, es decir la solución que se corresponde con el sistema cuando no tiene almacenada ninguna potencia. Por tanto el determinante principal del sistema (13.41) tiene que ser nulo. En consecuencia se verifica:

---

[3] $$U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t i_1.dt = \frac{Q_0}{C} - \frac{1}{C}\int_0^t i_1.dt = -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^0 i_1.dt - \frac{1}{C}\int_0^t i_1.dt = -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^t i_1.dt$$

$$\begin{vmatrix} (1/qC) & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 + q.L & -R_3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (13.42)$$

Resolviendo el determinante (13.42), se obtiene:

$$-(R_2 + q.L).\frac{1}{qC} - R_3.(R_2 + q.L) - R_3.\frac{1}{qC} = 0$$

$$R_3.L.C.q^2 + (L + R_2.R_3.C).q + R_2 + R_3 = 0 \qquad (13.43)$$

Si en (13.43) hacemos:

$$R_3.L.C = X \;\; ; \;\; L + R_2.R_3.C = Y \;\; ; \;\; R_2 + R_3 = Z$$

Resulta:

$$X.q^2 + Y.q + Z = 0 \qquad (13.44)$$

Resolviendo la ecuación (13.44), resulta:

$$q = \frac{-Y \pm \sqrt{Y^2 - 4.X.Z}}{2X} \qquad \begin{matrix} q_1 \\ \\ q_2 \end{matrix} \qquad (13.45)$$

Para cada valor de (13.45) se obtiene un conjunto de soluciones no nulas:

$$\begin{matrix} i_1 = I_{11}.e^{q_1.t} & i_1 = I_{12}.e^{q_2.t} \\ i_2 = I_{21}.e^{q_1.t} & i_2 = I_{22}.e^{q_2.t} \\ i_3 = I_{31}.e^{q_1.t} & i_3 = I_{32}.e^{q_2.t} \end{matrix} \qquad (13.46)$$

En el sistema (13.46) el primer subíndice de las intensidades se refiere a la rama correspondiente y el segundo a la raíz que ha proporcionado el conjunto de soluciones.

También es solución el conjunto de funciones: $\mathbf{K_1.i_1}$ ; $\mathbf{K_1.i_2}$; $\mathbf{K_1.i_3}$, para la solución $\mathbf{q_1}$, y $\mathbf{K_2.i_1}$; $\mathbf{K_2.i_2}$ ; $\mathbf{K_3.i_3}$, para la $\mathbf{q_2}$.

En él supuesto que tengamos **m** ramas, y suponiendo que la ecuación característica sea de grado **n**, la solución general del sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = K_1.I_{11}.\, e^{\,q1.t} + K_2.I_{12}.\, e^{\,q2.t} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + K_n.I_{1n}.\, e^{\,qn.t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_j = K_1.I_{j1}.\, e^{\,q1.t} + K_2.I_{j2}.\, e^{\,q2.t} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + K_n.I_{jn}.\, e^{\,qn.t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_n = K_1.I_{n1}.\, e^{\,q1.t} + K_2.I_{n2}.\, e^{\,q2.t} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + K_n.I_{nn}.\, e^{\,qn.t} \end{array}\right\} \qquad (13.47)$$

## 13.6. DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES QUE DEFINEN EL PROCESO DE DESCARGA EN REDES.

En el sistema de ecuaciones (13.38) se sustituyen las intensidades por las soluciones (13.46) correspondientes a $\mathbf{q_1}$.

$$\left.\begin{array}{l} 1/C \int_{-\infty}^{t} I_{11}.\, e^{\,q1.t}\, dt \qquad\qquad + R_3.I_{31}.e^{\,q1.t} = 0 \\ L.\, d(I_{21}.\, e^{\,q1.t})/dt + R_2.I_{21}.\, e^{\,q1.t} - R_3.I_{31}.\, e^{\,q1.t} = 0 \\ I_{11}.\, e^{\,q1.t} \qquad\qquad - I_{21}.\, e^{\,q1.t} \qquad - I_{31}.\, e^{\,q1.t} = 0 \end{array}\right\} \qquad (13.48)$$

Operando en (13.48), resulta:

$$\left.\begin{array}{l} 1/C\, .\, I_{11}/q_1.\, e^{\,q1.t} \qquad\qquad + R_3.I_{31}.e^{\,q1.t} = 0 \\ L.I_{21}.\, e^{\,q1.t}.q \qquad + R_2.I_{21}.\, e^{\,q1.t} - R_3.I_{31}.\, e^{\,q1.t} = 0 \\ I_{11}.\, e^{\,q1.t} \qquad\qquad - I_{21}.\, e^{\,q1.t} \qquad - I_{31}.\, e^{\,q1.t} = 0 \end{array}\right\} \qquad (13.49)$$

Dividiendo el sistema (13.49) por $\mathbf{e}^{\,\mathbf{q1.t}}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} 1/q_1.C\, I_{11} \qquad\qquad + R_3.I_{31} = 0 \\ (R_2 + L.q_1).I_{21} - R_3.I_{31} = 0 \\ I_{11} \qquad\qquad - I_{21} \qquad - I_{31} = 0 \end{array}\right\} \qquad (13.50)$$

El sistema de ecuaciones (13.50) es homogéneo y existen soluciones no nulas, ya que el determinante principal es nulo. Si se asigna a una de las intensidades, por ejemplo a $\mathbf{I_{31}}$ un valor arbitrario, se deducen las otras dos intensidades, $\mathbf{I_{21}}$ e $\mathbf{I_{11}}$, utilizando dos cualesquiera de las tres ecuaciones de (13.50).

Para el otro valor de la ecuación característica, $\mathbf{q_2}$, se obtienen, partiendo de un valor arbitrario de $\mathbf{I_{32}}$, otros dos valores $\mathbf{I_{22}}$ e $\mathbf{I_{12}}$. La solución general será:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= A_1.I_{11}.e^{q_1.t} + A_2.I_{12}.e^{q_2.t} \\ i_2 &= A_1.I_{21}.e^{q_1.t} + A_2.I_{22}.e^{q_2.t} \\ i_3 &= i_1 - i_2 \end{aligned}\right\} \qquad (13.51)$$

Es preciso calcular $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$, con el fin de particularizar la solución. Para determinar estas constantes, se recurre a las condiciones iniciales:

$$t = 0 \left\{\begin{aligned} i_2 &= I_0 \\ u_c &= U_0 \end{aligned}\right. \qquad (13.52)$$

En consecuencia la segunda ecuación del sistema (13.51) queda de la forma:

$$I_0 = A_1.I_{21} + A_2.I_{22} \qquad (13.53)$$

También:

$$u_c = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1 dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} (A_1.I_{11}.e^{q_1.t} + A_2.I_{12}.e^{q_2.t})dt \qquad (13.54)$$

Particularizando (13.54) para **t=0**, resulta:

$$[u_c]_{t=0} = [\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1 dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} (A_1.I_{11}.e^{q1}.t + A_2.I_{12}.e^{q2.t}).dt]_t = 0 \qquad (13.55)$$

Operando (13.55), resulta:

$$U_0 = \frac{A_1}{q_1.C}.I_{11} + \frac{A_2}{q_2.C}.I_{12} \qquad (13.56)$$

Esta ecuación junto con (13.53), permiten calcular $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$.