TEMA 14

CORRIENTES ALTERNAS

14.1. VALORES ASOCIADOS A LAS ONDAS SENOIDALES.

Sea un cuadro rectangular de lados **h** y **l,** formado por **N** espiras devanadas en serie, que gira a velocidad angular constante **ω** en el seno de un campo magnético uniforme de inducción **B**.

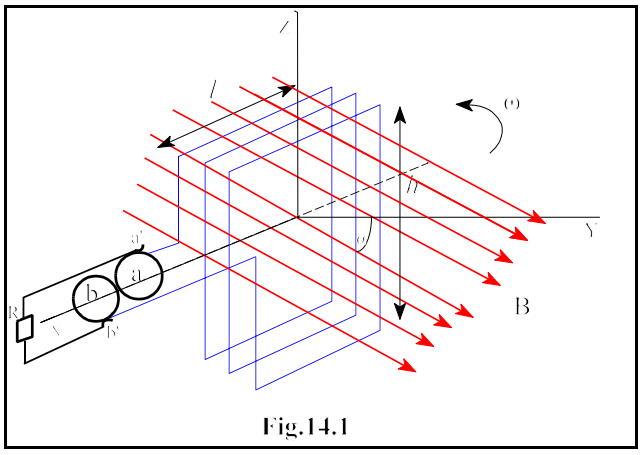


Fig.14.1

Los terminales **a** y **b** de la espira están conectados a dos anillos rozantes sobre las escobillas **a'** y **b'**, respectivamente.

Las escobillas alimentan el circuito exterior **R**.

En el instante **t**, que corresponde a un ángulo de giro **α**, el flujo que atraviesa la espira es:

$$\Phi = \vec{A}.\vec{B} \quad ; \quad \Phi = A.B.\cos\alpha \quad ; \quad \Phi = h.l.B.\cos\alpha \qquad (14.1)$$

Siendo **α**, el ángulo formado por la inducción magnética y el vector que define la superficie de cada espira.

Cuando la espira gira, se induce en ella una fuerza electromotriz **e'**:

$$e' = -\frac{d\Phi}{dt} \quad ; \quad -\frac{d\Phi}{dt} = h.l.B.sen\alpha.\frac{d\alpha}{dt} \qquad (14.2)$$

Como la espira gira con velocidad angular constante **ω,** se verifica:

$$\alpha = \omega.t + \varphi \quad ; \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega \qquad (14.3)$$

Siendo **φ** el ángulo para t= 0.

Sustituyendo (14.3) en (14.2), resulta:

$$e' = h.l.B.\omega.sen(\omega t+\varphi) \qquad (14.4)$$

Pero **h.l** es el área de la espira, **A** y como el cuadro tiene **N** espiras todas conectadas en serie, la fuerza electromotriz inducida por el cuadro es:

$$e = N.A.B.\omega.sen(\omega t+\varphi) \qquad (14.5)$$

Siendo $E_m = N.A.B.\omega$ (valor máximo de la fuerza electromotriz), la expresión (14.5) se convierte es:

$$e = E_m.sen(\omega t+\varphi) \qquad (14.6)$$

En resumen, como consecuencia del movimiento del cuadro, se ha inducido una fuerza electromotriz alterna senoidal, cuya representación se da en la Fig. 14.2

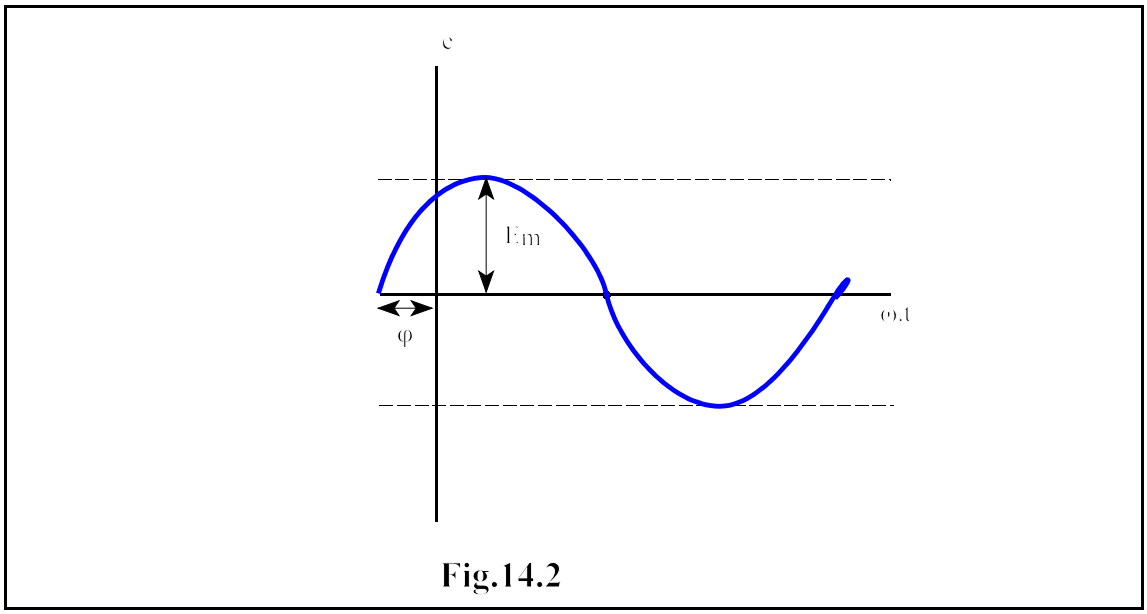


Fig.14.2

Los valores asociados a la función (14.6), son:

e : Valor instantáneo, función del tiempo (V).
$\mathbf{E_m}$: Amplitud, valor máximo(V).
ω : Pulsación ($rd.s^{-1}$).
f : Frecuencia ($\omega/2.\pi$) (Hz).
ω.t + φ : Ángulo de fase (rd).
T : Período (T = 1/f) (s).

Valor medio en un semiperíodo, (**E'**) en voltios:

$$E' = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} E_m.sen(\omega t).dt = \frac{2}{\pi}.E_m \qquad (14.7)$$

Valor eficaz, también llamado valor medio cuadrático, (**E**) en voltios.

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} E_m^2.sen^2(\omega t).dt} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \qquad (14.8)$$

Se definen dos factores:

Factor de amplitud, cociente entre el valor máximo y el valor eficaz

$$a = \frac{E_m}{E} = \sqrt{2} \qquad (14.9)$$

Factor de forma, cociente entre el valor eficaz y el valor medio

$$b = \frac{E}{E'} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11 \qquad (14.10)$$

14.2. CORRIENTE ALTERNA EN UN CIRCUITO SERIE. RÉGIMEN PERMANENTE.

Sean tres elementos ideales: una resistencia **R**, una autoinducción **L**, y una capacidad **C**, conectados en serie y alimentados por una fuente de tensión alterna senoidal. La ecuación que define la intensidad se obtiene a partir de la ecuación del circuito. La ecuación del circuito (Fig.14.3) es:

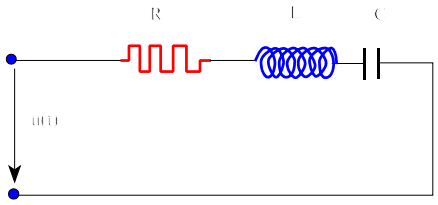


Fig.14.3

$$u(t) = u_R + u_L + u_c \qquad (14.11)$$

Teniendo en cuenta que la diferencia de potencial entre dos puntos es:

$$u_{ab} = \sum_{k=1}^{n} R_k.i - \sum_{k=1}^{m} e_k$$

La diferencia de potencial en bornes de la resistencia, es:

$$u_R = R.i \qquad (14.12)$$

La diferencia de potencial en bornes de la autoinducción, es:

$$u_L = L.\frac{di}{dt} \qquad (14.13)$$

La diferencia de potencial en bornes de la capacidad, es:

$$u_c = \frac{1}{C}\int_0^t i.dt \qquad (14.14)$$

Sustituyendo (14.12), (14.13) y (14.14) en (14.11), tenemos:

$$U_m.sen(\omega t) = L.\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int_0^t i.dt \qquad (14.15)$$

Ecuación integro-diferencial, que resuelta dará la función que define la intensidad, **i**. Derivando con respecto al tiempo (14.15) resulta:

$$U_m.\omega\cos(\omega t) = L.\frac{d^2i}{dt^2} + R.\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}.i \qquad (14.16)$$

La expresión (14.16) es una ecuación diferencial completa de coeficientes constantes. Su integral es:

$$i = A_1.e^{\alpha_1 t} + A_2.e^{\alpha_2 t} + I_m.sen(\omega t - \varphi) \qquad (14.17)$$

Haciendo:

$$i = i_1 + i_2 \qquad (14.18)$$

Comparando (14.17) y (14.18), resulta:

$$i_1 = A_1.e^{\alpha_1 t} + A_2.e^{\alpha_2 t} \quad ; \quad i_2 = I_m.sen(\omega t - \varphi) \qquad (14.19)$$

La solución $\mathbf{i_1}$ se ha estudiado en el Tema 13, y se ha visto que se extingue con el tiempo.

En el régimen permanente la corriente **i**, tiende a la solución i_2, por tanto:

$$\lim_{t\to\infty} i = i_2 = I_m.sen(\omega t - \varphi) \tag{14.20}$$

Para calcular la solución particular de la completa, derivamos la intensidad con respecto al tiempo dos veces,

$$\frac{di}{dt} = I_m.\omega.\cos(\omega t - \varphi) \tag{14.21}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = - I_m.\omega^2.sen(\omega t - \varphi) \tag{14.22}$$

Sustituyendo (14.21) y (14.22) en la ecuación diferencial completa (14.16), resulta:

$$\begin{aligned} U_m.\omega.\cos\omega t = & - L.[I_m.\omega^2.(sen\,\omega t.\cos\varphi - \cos\omega t.sen\,\varphi)] + \\ & + R.[I_m.\omega.(\cos\omega t.\cos\varphi + sen\,\omega t.sen\,\varphi)] + \\ & + \frac{1}{C}.[I_m.(sen\,\omega t.\cos\varphi - \cos\omega t.sen\,\varphi)] \end{aligned} \tag{14.23}$$

Identificando coeficientes de **sen ωt** y **cos ωt** en ambos miembros de (14.23) y operando resulta:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}} \tag{14.24}$$

$$tang\,\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{14.25}$$

En consecuencia, la intensidad que circula en un circuito **R**, **L** y **C**, cuando se aplica una tensión senoidal, es también senoidal de la misma pulsación pero desfasada un ángulo **φ** respecto a la tensión, de acuerdo con la expresión (14.25).

14.3. REACTANCIA E IMPEDANCIA.

Se denomina:

Reactancia inductiva : $X_L = \omega L$

Reactancia capacitiva: $X_C = \frac{1}{\omega C}$

Reactancia : $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

Impedancia: $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$

Todas expresadas en ohmios **(Ω)**.

Si en el plano de Gauss tomamos el semieje positivo de abscisas para representar las resistencias, y el de ordenadas para las reactancias; las inductivas en la parte positiva y las capacitivas en la parte negativa, todo punto del semiplano de Gauss de abscisa positiva define una impedancia, cuyo origen es el de los ejes, y extremo el punto considerado. El triángulo obtenido se denomina de impedancia.

A partir de (14.24), dividiendo ambos miembros por el factor de amplitud, y teniendo en cuenta la impedancia tal como se ha definido más arriba, se obtiene la expresión:

$$I = \frac{U}{Z} \qquad (14.26)$$

La expresión (14.26) recibe el nombre de *Ley de Ohm en corriente alterna*.

A partir de la Fig.14.4, se obtiene:

$R = Z.\cos\varphi$

$X = Z.sen\varphi$

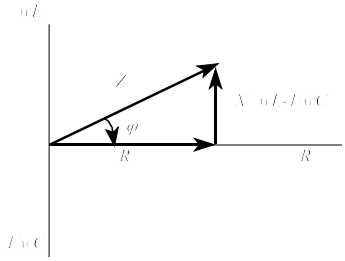


Fig.14.4

14.4. REPRESENTACIÓN CARTESIANA, VECTORIAL Y COMPLEJA DE LAS CORRIENTES SENOIDALES.

Cartesiana:

- En el eje de abscisas se toma **ω.t** ó **t**.
- En el eje de ordenadas los valores; **u** ó **i**.

Una onda, está adelantada respecto a otra, si el comienzo de la onda en el valor cero es anterior a la referida, cuando se avanza en el sentido positivo de las abscisas.

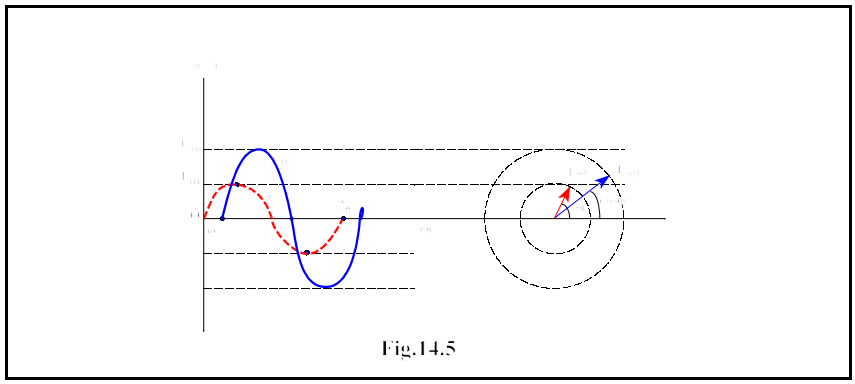


Fig.14.5

Vectorial:

A las funciones senoidales se les puede asignar vectores rotatorios que giran en el sentido contrario a las agujas del reloj, con una velocidad angular constante **ω**, de longitud el valor máximo de la función, y con origen de fases el semieje positivo de abscisas. El valor instantáneo de la función es el afijo del vector (Fig.14.5)[1].

El conjunto de $\mathbf{U_m}$ e $\mathbf{I_m}$ giran a igual velocidad y siempre desfasados el ángulo **φ**. A los vectores para **t=0** se les llama *fasores*.

Compleja:

Las funciones senoidales se pueden representar en el plano de Gauss. Puesto que:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j.sen(\omega t) \qquad (14.27)$$

El valor instantáneo de la tensión, es:

$$u = U_m.sen(\omega t)$$

Se puede escribir:

$$u = U_m.\zeta[e^{j\omega t}] \qquad (14.28)$$

Donde ζ indica la operación de tomar la parte imaginaria del número complejo que figura entre paréntesis. Por el mismo motivo:

$$i = \zeta[I_m.e^{j(\omega t-\varphi)}] = \zeta[I_m.e^{j\omega t}.e^{-j\varphi}] \qquad (14.29)$$

[1] En este caso, la tensión está retrasada un ángulo φ respecto de la intensidad.

Para **t = 0**, los fasores se representan:

$$\overline{U}_m = U_m \;\; ; \;\; \bar{I}_m = I_m.e^{-j\varphi} \tag{14.30}$$

Puede usarse la notación exponencial, polar o binómica:

$$\bar{I}_m = I_m.e^{-j\varphi} = I_m\angle -\varphi = I_m.(\cos\varphi - j.sen\varphi) \tag{14.31}$$

El número complejo se toma para t=0.

14.5. OPERACIONES CON VECTORES GIRATORIOS.

14.5.1 Suma de vectores fijos.

Sean dos vectores fijos $\bar{\mathbf{I}}_1$ e $\bar{\mathbf{I}}_2$ de finidos por las expresiones:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= I_1.e^{j\varphi_1} = I_1.\cos\varphi_1 + j.I_1.sen\varphi_1 \\ \bar{I}_2 &= I_2.e^{j\varphi_2} = I_2.\cos\varphi_2 + j.I_2.sen\varphi_2 \end{aligned} \tag{14.32}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (14.32)

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = I_1.\cos\varphi_1 + I_2.\cos\varphi_2 + j.(I_1.sen\varphi_1 + I_2.sen\varphi_2)$$

Ahora bien, la suma es un vector fijo, $\bar{\mathbf{I}}$ tal que verifica:

$$\bar{I} = I.e^{j\varphi} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \tag{14.33}$$

Cuyo módulo y argumento, son:

$$I = \sqrt{(I_1.\cos\varphi_1 + I_2.\cos\varphi_2)^2 + (I_1.sen\varphi_1 + I_2.sen\varphi_2)^2} \tag{14.34}$$

$$\varphi = tang^{-1} = \frac{I_1.sen\varphi_1 + I_2.sen\varphi_2}{I_1.\cos\varphi_1 + I_2.\cos\varphi_2} \tag{14.35}$$

En consecuencia, *la expresión simbólica de la función suma es igual a la suma (14.33) de las expresiones simbólicas de las funciones sumandos (14.32).*

14.5.2. Multiplicación de un vector giratorio por otro fijo.

La multiplicación de un vector giratorio $\bar{\mathbf{I}}$ por otro fijo $\bar{\mathbf{A}}$, es otro vector giratorio de la misma pulsación, cuyo módulo es igual al producto de los módulos de ambos vectores, y adelantado el argumento de $\bar{\mathbf{A}}$ **(φ')** con respecto a $\bar{\mathbf{I}}$.

$$\bar{I} = I_m.e^{j(\omega t-\varphi)} \quad ; \quad \overline{A} = A_m.e^{j\varphi'}$$

$$\bar{I}.\overline{A} = I_m.A_m.e^{j.[\omega t-(\varphi-\varphi')]} \qquad (14.36)$$

14.5.3. División de un vector giratorio por otro fijo.

La división de un vector giratorio $\bar{\mathbf{I}}$ por otro fijo $\bar{\mathbf{A}}$, es un vector giratorio de la misma pulsación, cuyo módulo es igual al cociente de los módulos de ambos vectores, y retrasado el argumento de $\bar{\mathbf{A}}$ **(φ')** con respecto a $\bar{\mathbf{I}}$

$$\frac{\overline{I}}{\overline{A}} = \frac{I_m.e^{j(\omega t-\varphi)}}{A_m.e^{j\varphi'}} = \frac{I_m}{A_m}.e^{j[\omega t-(\varphi+\varphi')]} \qquad (14.37)$$

14.5.4. Integral de un vector giratorio.

La integral de un vector giratorio $\bar{\mathbf{I}}$, es otro vector giratorio de la misma pulsación, módulo $\boldsymbol{\omega}$ veces menor y retrasado $\boldsymbol{\pi/2}$ respecto de $\bar{\mathbf{I}}$.

$$\int \bar{I}.dt = \frac{I_m}{j\omega}.e^{j(\omega t-\varphi)} = \frac{I_m}{\omega}.e^{-j\frac{\pi}{2}}.e^{j(\omega t-\varphi)} = \frac{I_m}{\omega}.e^{j[\omega t-(\varphi+\frac{\pi}{2})]} \qquad (14.38)$$

14.5.5. Derivada de un vector giratorio.

La derivada de un vector giratorio $\bar{\mathbf{I}}$, es otro vector giratorio de la misma pulsación, módulo $\boldsymbol{\omega}$ veces mayor y adelantado $\boldsymbol{\pi/2}$ respecto a $\mathbf{I}$.

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = j\omega.I_m.e^{j(\omega t-\varphi)} = e^{j.\frac{\pi}{2}}.\omega.I_m.e^{j(\omega t-\varphi)} = \omega.I_m.e^{j(\omega t-(\varphi-\frac{\pi}{2})]} \qquad (14.39)$$

14.6. EXPRESIÓN SIMBÓLICA DE LA LEY DE OHM.

La ecuación característica del circuito serie R, L y C es:

$$L.\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int_0^t i.dt = u(t) \qquad (14.40)$$

Las expresiones complejas de la tensión e intensidad son:

$$\overline{U} = U_m.e^{j\omega t} \;\; ; \;\; \bar{I} = I_m.e^{j(\omega t - \varphi)} \qquad (14.41)$$

Cuyos fasores son:

$$\overline{U}_m = U_m \;\; ; \;\; \bar{I}_m = I_m.e^{-j\varphi} \qquad (14.42)$$

Sustituyendo (14.42) en (14.41), resulta:

$$\overline{U} = \overline{U}_m.e^{j\omega t} \;\; ; \;\; \bar{I} = \bar{I}_m.e^{j\omega t} \qquad (14.43)$$

Sustituyendo (14.43) en (14.40) y realizando la operación de tomar la parte imaginaria de los complejos, resulta:

$$\zeta[L.\frac{d\bar{I}_m.e^{j\omega t}}{dt} + R.\bar{I}_m.e^{j\omega t} + \frac{1}{C}\int_0^t \bar{I}_m.e^{j\omega t}.dt] = \zeta(\overline{U}_m.e^{j\omega t}) \qquad (14.44)$$

Operando (14.44), resulta:

$$\zeta[L.\bar{I}_m.j\omega.e^{j\omega t} + R.\bar{I}_m.e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}\bar{I}_m.e^{j\omega t}] = \zeta(\overline{U}_m.e^{j\omega t}) \qquad (14.45)$$

O bien:

$$\zeta[\bar{I}_m[(R. + j.(L.\omega - \frac{1}{\omega C})].e^{j\omega t}] = \zeta(\overline{U}_m.e^{j\omega t}) \qquad (14.46)$$

Como la expresión (14.46) se cumple para todo valor de **t**, también se cumplirá para el valor cero. Por tanto se verificará:

$$\bar{I}_m[R. + j.(L.j\omega - \frac{1}{j\omega C})] = \overline{U}_m \qquad (14.47)$$

Según se vio en el apartado 14.3, se puede expresar la impedancia de la forma:

$$\overline{Z} = R + j.(L\omega - \frac{1}{\omega C}) \qquad (14.48)$$

Teniendo en cuenta (14.48), la ecuación (14.47) se reduce a:

$$\bar{I}_m.\bar{Z} = \bar{U}_m \qquad (14.49)$$

Y en valores eficaces:

$$\bar{I}.\bar{Z} = \bar{U} \qquad (14.50)$$

La expresión (14.50) se conoce como: *Expresión simbólica de la Ley de Ohm.*