TEMA 19

SISTEMAS TRIFÁSICOS

19.1. DIAGRAMA ROTATORIO DE TENSIONES E INTENSIDADES.

Para establecer una circulación de corrientes es preciso conectar los generadores con los receptores mediante conductores eléctricos. Estos conductores constituyen *la línea eléctrica.*

En la Fig. 19.1 se han conectado tres generadores monofásicos con tres receptores también monofásicos.

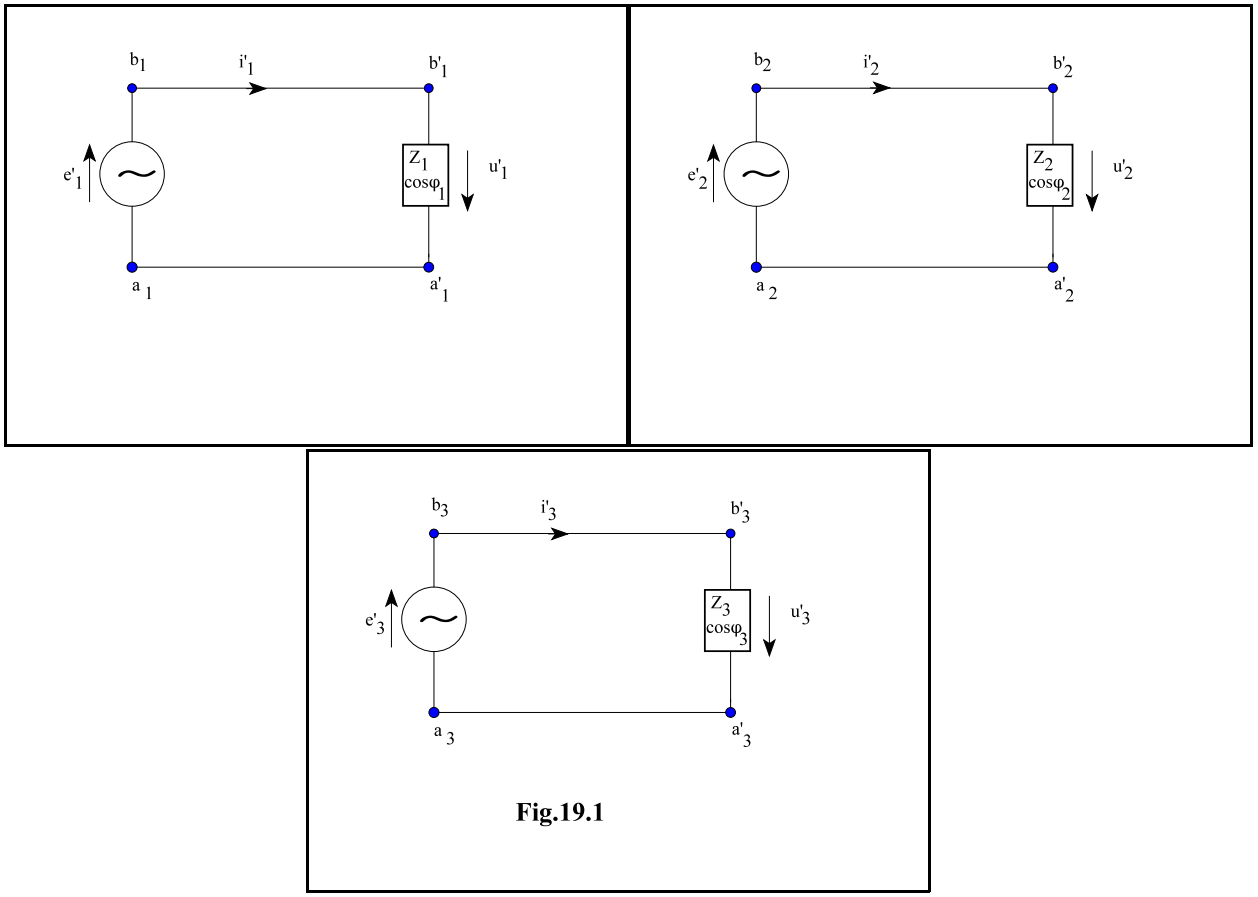


Fig.19.1

Cada receptor, con impedancias $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$ y $\mathbf{Z_3}$ y factores de potencia $\mathbf{cos\varphi_1}$, $\mathbf{cos\varphi_2}$ y $\mathbf{cos\varphi_3}$, queda sometido a tensiones $\mathbf{u'_1}$, $\mathbf{u'_2}$ y $\mathbf{u'_3}$ y recorrido por corrientes $\mathbf{i'_1}$, $\mathbf{i'_2}$ y $\mathbf{i'_3}$, respectivamente.

Los tres generadores monofásicos, si cumplen las condiciones para poder conectarse como un generador trifásico, pueden hacerlo en estrella (Y) o en triángulo (Δ), y lo mismo los tres receptores.

La conexión en estrella se realiza uniendo los bornes de entrada: $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ y $\mathbf{a_3}$ en un punto (punto neutro del generador) **O**, y los de salida: $\mathbf{a'_1}$, $\mathbf{a'_2}$ y $\mathbf{a'_3}$ en otro punto **O'** (punto neutro del receptor). De esta forma el conjunto de los circuitos monofásicos independientes se reduce a uno sólo trifásico.

Si se unen los bornes de salida del generador con los de entrada del receptor, es decir: $\mathbf{b_1}$ con $\mathbf{b'_1}$, $\mathbf{b_2}$ con $\mathbf{b'_2}$, $\mathbf{b_3}$ con $\mathbf{b'_3}$, y **O** con **O'**, se ha conectado el generador en estrella con el receptor, también en estrella. Para esa conexión sólo se necesitan cuatro conductores, en lugar de seis, según se desprende de la Fig. 19.2.

El conductor que une los dos puntos neutros del generador y del receptor, **O** y **O'**, se designa con el número **4** o la letra **N.** Los otros tres conductores se designan con los números **1**, **2** y **3**, o con las letras **R**, **S** y **T,** respectivamente.

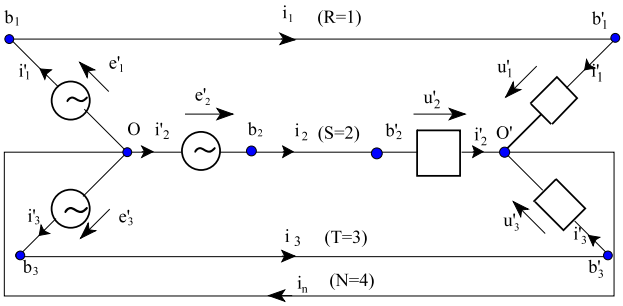


Fig.19.2

De la Fig.19.2 se deduce:

$$i'_1 + i'_2 + i'_3 = i_1 + i_2 + i_3 = i_n \qquad (19.1)$$

En los sistemas equilibrados (generadores y receptores) se cumple:

$$i'_1 + i'_2 + i'_3 = i_1 + i_2 + i_3 = 0 \qquad (19.2)$$

De la Fig.19.2 se desprende que se pueden estudiar por separado; generador y receptor.

19.2. SISTEMA RECEPTOR EN ESTRELLA.

En la Fig.19.2 se observa que el sistema generador permite alimentar una línea, la cual a su vez alimenta un sistema receptor.

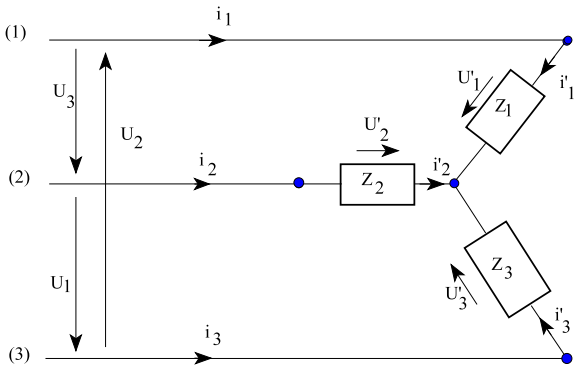


Fig.19.3

En la Fig.19.3, se representa la línea trifásica a tres hilos, con orden de sucesión de fases **1**, **2**, **3**, que alimenta un receptor trifásico compuesto por tres impedancias; $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$ y $\mathbf{Z_3}$, conectadas en estrella.

De forma análoga a como se tomó la referencia para las fuerzas electromotrices en el Tema 18, se hace con las tensiones en el receptor.

Las tensiones $\mathbf{u'_1}$, $\mathbf{u'_2}$ y $\mathbf{u'_3}$ a las que quedan conectadas las impedancias $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$ y $\mathbf{Z_3}$, respectivamente, se denominan *tensiones simples, estrelladas o de fase*. Como consecuencia de estas tensiones, las impedancias absorben intensidades $\mathbf{i'_1}$, $\mathbf{i'_2}$, $\mathbf{i'_3}$, que van desfasadas, respecto a las tensiones simples, ángulos correspondientes a sus factores de potencia.

Las intensidades que circulan por la línea; $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_2}$ e $\mathbf{i_3}$, se denominan genéricamente, *intensidades de línea.*

Las tensiones entre hilos de la línea se denominan *tensiones compuestas o de línea.*

De acuerdo con la Fig.19.3, se verifica la siguiente relación entre intensidades en los receptores y en la línea:

$$\begin{aligned} i'_1 &= i_1 \\ i'_2 &= i_2 \\ i'_3 &= i_3 \end{aligned} \qquad (19.3)$$

También se verifican las siguientes relaciones entre los valores instantáneos de las tensiones simples y compuestas:

$$\begin{aligned} u_1 &= u'_2 - u'_3 \\ u_2 &= u'_3 - u'_1 \\ u_3 &= u'_1 - u'_2 \end{aligned} \qquad (19.4)$$

O bien en forma compleja:

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{U'}_2 - \overline{U'}_3 \\ \overline{U}_2 &= \overline{U'}_3 - \overline{U'}_1 \\ \overline{U}_3 &= \overline{U'}_1 - \overline{U'}_2 \end{aligned} \qquad (19.5)$$

Las expresiones (19.5) se pueden representar en el diagrama de la Fig. 19.4.

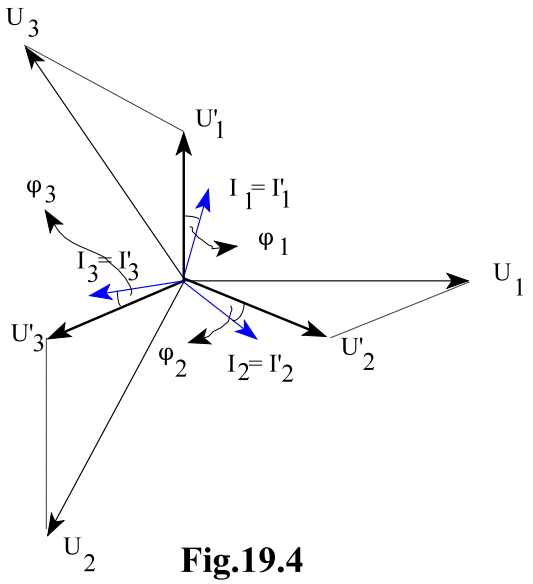


Fig.19.4

Al igual que en el caso de las fuerzas electromotrices (18.23), se verifica:

$$U = \sqrt{3}.U'$$

Las intensidades se representan en el diagrama de la Fig. 19.4. Teniendo en cuenta que las intensidades en los receptores coinciden con las de línea, en este tipo de conexión, se cumple:

$$\begin{aligned} I_1 = I'_1 = \frac{U'_1}{Z_1} \;;\; \varphi_1 = I'_1\, U'_1 = tang^{-1} = \frac{X_1}{R_1} \\ I_2 = I'_2 = \frac{U'_2}{Z_2} \;;\; \varphi_2 = I'_2\, U'_2 = tang^{-1} = \frac{X_2}{R_2} \\ I_3 = I'_3 = \frac{U'_3}{Z_3} \;;\; \varphi_3 = I'_3\, U'_3 = tang^{-1} = \frac{X_3}{R_3} \end{aligned} \qquad (19.6)$$

O bien en expresiones complejas:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}'_1 = \frac{\overline{U'}_1}{\bar{Z}_1}$$
$$\bar{I}_2 = \bar{I}'_2 = \frac{\overline{U'}_2}{\bar{Z}_2} \qquad (19.7)$$
$$\bar{I}_3 = \bar{I}'_3 = \frac{\overline{U'}_3}{\bar{Z}_3}$$

El receptor es equilibrado cuando se cumple:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R \;\; ; \;\; X_1 = X_2 = X_3 = X \;\; ; \;\; \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$$

Por tanto también se cumplirá para las intensidades:

$$I'_1 = I'_2 = I'_3 = I' \;\; ; \;\; I_1 = I_2 = I_3 = I \;\; ; \;\; I_1 = I'$$

19.3. SISTEMA RECEPTOR EN TRIÁNGULO.

Suponiendo que la conexión del sistema receptor se realice en triángulo, las tres impedancias $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$, se conectan según la Fig. 19.5.

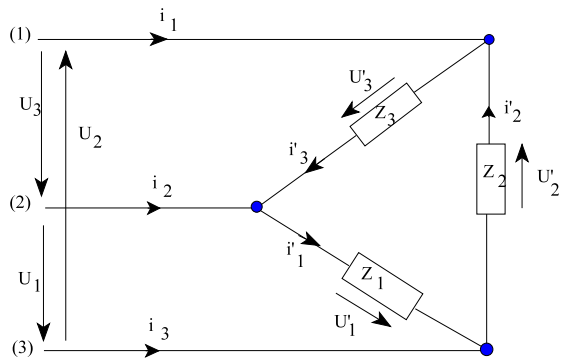


Fig.19.5

Conviene señalar que la conexión del sistema receptor es independiente de como se halle conectado el sistema generador, es decir que ambos pueden estar conectados en estrella o triángulo, de forma indistinta.

En la Fig. 19.5 se representa una línea trifásica a tres hilos y orden de sucesión de fases 1, 2 y 3, que alimenta a tres impedancias conectadas en triángulo. En este tipo de conexión no pueden utilizarse más que tres hilos, por lo que carece de sentido el hilo neutro.

De la Fig. 19.5 se obtiene las siguientes relaciones entre tensiones en la línea y tensiones en los receptores:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 & \bar{U}_1 &= \bar{U}_1 \\ u_2 &= u_2 & \bar{U}_2 &= \bar{U}_2 \\ u_3 &= u_3 & \bar{U}_3 &= \bar{U}_3 \end{aligned} \qquad (19.8)$$

En expresiones instantáneas o complejas, respectivamente.

También se obtienen las siguientes relaciones entre las intensidades de línea y de receptores:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_3 - i_2 & \bar{I}_1 &= \bar{I}_3 - \bar{I}_2 \\ i_2 &= i_1 - i_3 & \bar{I}_2 &= \bar{I}_1 - \bar{I}_3 \\ i_3 &= i_2 - i_1 & \bar{I}_3 &= \bar{I}_2 - \bar{I}_1 \end{aligned} \qquad (19.9)$$

En este caso las intensidades en los receptores están desfasadas $\varphi_{i\ (i=1,2,3)}$, respecto de las tensiones compuestas o de línea, que son las que existen en bornes de los receptores.

Se verifica:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1} \qquad \varphi_1 = I'_1\ U_1 = \text{arc tang } X_1/R_1$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} \qquad \varphi_2 = I'_2\ U_2 = \text{arc tang } X_2/R_2 \qquad (19.10)$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3} \qquad \varphi_3 = I'_3\ U_3 = \text{arc tang } X_3/R_3$$

En la Fig.19.6 se representan, en un diagrama, las tensiones e intensidades en el receptor conectado en triángulo.

Sumando miembro a miembro (19.9), resulta:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

O bien:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

En expresiones instantáneas o complejas, respectivamente.

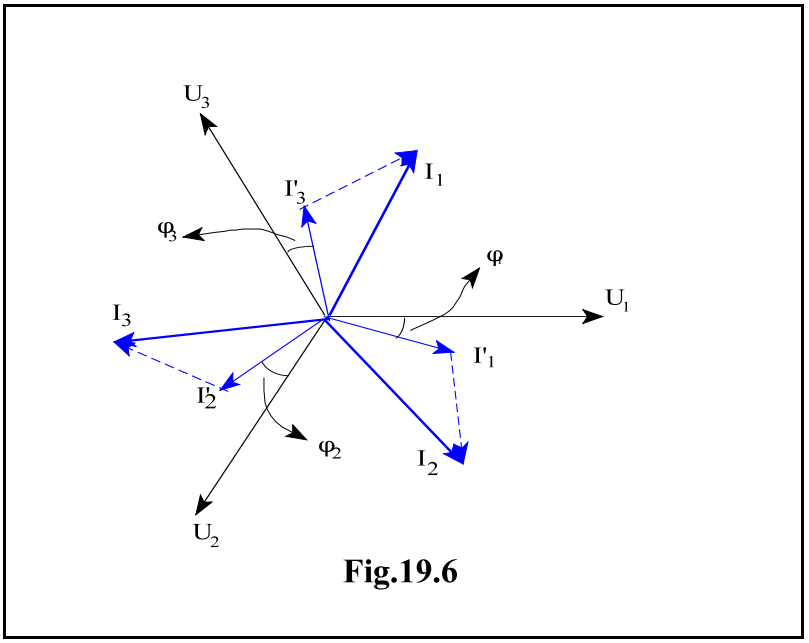


Fig.19.6

El receptor es equilibrado, cuando se verifica:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R \quad ; \quad X_1 = X_2 = X_3 = X \quad ; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$$

Por tanto se cumplirá:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I' \quad ; \quad I_1 = I_2 = I_3 = I$$

En este caso, el triángulo definido por cada una de las intensidades de línea y las dos correspondientes simples, es isósceles, siendo el ángulo que forman las dos intensidades simples (es decir en los receptores) 120º.

Por tanto se cumplirá:

$$I = \sqrt{3}.I'$$

Según lo que se acaba de ver para las conexiones en estrella y en triángulo, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1ª.- Todo receptor equilibrado conectado en estrella, constituido por tres receptores monofásicos, si se conecta a una línea equilibrada, la tensión a la que queda sometido cada uno de los monofásicos es $\sqrt{3}$ veces más pequeña que la tensión compuesta o de línea. La corriente que recorre los receptores monofásicos es la misma que la que recorre la línea.

2ª.- Todo receptor equilibrado conectado en triángulo, constituido por tres receptores monofásicos, si se conecta a una línea equilibrada, la tensión a la que queda sometido cada uno de los monofásicos es la misma que la tensión compuesta o de línea. La corriente que recorre los receptores es $\sqrt{3}$ veces más pequeña que la que recorre los hilos de la línea.

Las tensiones compuestas, en baja tensión, están normalizadas con valores: **127, 230, 400** y **690** voltios. Siendo las más frecuentes **230** y **400** V, y las tensiones simples correspondientes serían **130** y **230** V, respectivamente. Las líneas se indicarán: **230/127 V ; 400/230 V; 690/400 V.**

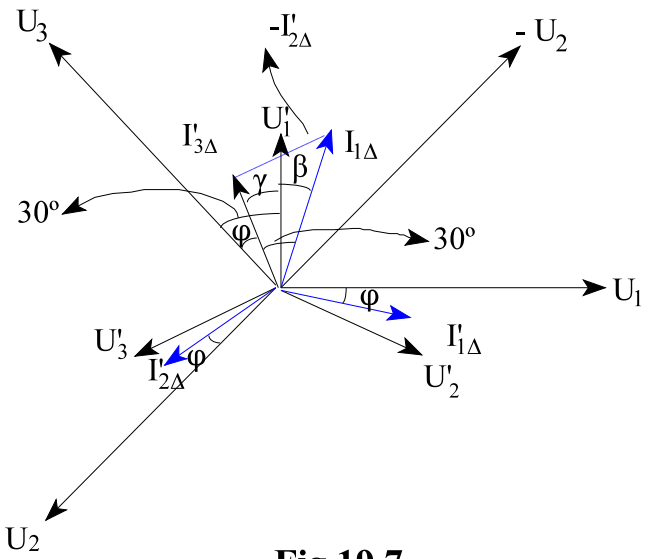


Fig.19.7

19.4. EQUIVALENCIA ENTRE RECEPTORES EQUILIBRADOS EN ESTRELLA Y EN TRIÁNGULO.

Es conveniente representar en un único diagrama vectorial las tensiones simples y compuestas, además de las intensidades que absorbe el receptor trifásico equilibrado, tanto si está conectado en estrella, como en triángulo.

De la relación que existe entre las intensidades de (19.7), que toma el receptor en estrella y las (19,9), que toma el mismo receptor cuando se conecta en triángulo, resulta:

$$\left.\begin{aligned} I_\Delta &= \sqrt{3}.I_\Delta = \sqrt{3}.\frac{U}{Z} \\ I_Y &= \frac{U'}{Z} = \frac{U}{\sqrt{3}.Z} \end{aligned}\right\} \qquad (19.11)$$

Dividiendo miembro a miembro (19.11)

$$I_\Delta = 3.I_Y$$

Es decir *un receptor trifásico conectado en triángulo, absorbe tres veces más intensidad de la línea, que si se conectase en estrella.*

Además en la Fig.19.7 se verifica:

$$\beta = 30^o - \gamma$$
$$\gamma = 30^o - \varphi \qquad (19.12)$$
$$\beta = \varphi$$

Para la demostración se pueden utilizar expresiones complejas. En efecto:

$$\bar{U}_1 = U\angle 0^o \quad ; \quad \bar{U}_2 = U\angle 240^o \quad ; \quad \bar{U}_3 = U\angle 120^o$$

$$\bar{I}'_{1\Delta} = I'_\Delta\angle -\varphi \quad ; \quad \bar{I}'_{2\Delta} = I'_\Delta\angle 240^o-\varphi \; ; \quad \bar{I}'_{3\Delta} = I'_\Delta\angle 120^o-\varphi \qquad (19.13)$$

Como las intensidades que circulan por los receptores, conectados en triángulo, están retrasadas (en caso de ser parcialmente inductivo el receptor) respecto a las tensiones a las que están conectadas, es decir, las de línea, se verifica:

$$\bar{I}_{1\Delta} = \bar{I}'_{3\Delta} - \bar{I}'_{2\Delta} = I'_\Delta\angle 120^o-\varphi - I'_\Delta\angle 240^o-\varphi = I'_\Delta[\ 1\angle 120^o-\varphi \ - 1\angle 240^o-\varphi \ ] =$$

$$= I'_\Delta\,[\cos(120^o-\varphi) + j.\mathrm{sen}\,(120^o - \varphi) - \cos(240^o - \varphi) - j.\mathrm{sen}\,(240^o - \varphi)] =$$

$$= I'_\Delta[-\tfrac{1}{2}.\cos\varphi + \sqrt{3}/2.\mathrm{sen}\,\varphi + j.(\sqrt{3}/2.\cos\varphi + \tfrac{1}{2}.\mathrm{sen}\,\varphi) - (-\tfrac{1}{2}.\cos\varphi - \sqrt{3}/2.\mathrm{sen}\,\varphi) -$$

$$- j.(-\sqrt{3}/2.\cos\varphi + \tfrac{1}{2}.\mathrm{sen}\,\varphi)] = I'_\Delta[\sqrt{3}.\mathrm{sen}\,\varphi + j.\sqrt{3}.\cos\varphi\ ] = \sqrt{3}.\ I'_\Delta[\mathrm{sen}\,\varphi + j.\cos\varphi\ ]$$

$$\bar{I}_{1\Delta} = \sqrt{3}.\ I'_\Delta\angle 90^o-\varphi \qquad (19.14)$$

También:

$$\bar{I}_{2\Delta} = \bar{I}'_{1\Delta} - \bar{I}'_{3\Delta} = I'_\Delta\angle -\varphi - I'_\Delta\angle 120^o-\varphi = I'_\Delta[\ 1\angle -\varphi \ - 1\angle 120^o-\varphi \ ] =$$

$$= I'_\Delta\,[\cos(-\varphi) + j.\mathrm{sen}\,(-\varphi) - \cos(120^o - \varphi) - j.\mathrm{sen}\,(120^o - \varphi)] =$$

$$= I'_\Delta[\cos\varphi - j.\mathrm{sen}\,\varphi + \tfrac{1}{2}.\cos\varphi - \sqrt{}\ 3/2.\mathrm{sen}\,\varphi \ -j.(\sqrt{3}/2.\cos\varphi + \tfrac{1}{2}.\mathrm{sen}\,\varphi)] =$$

$$= I'_\Delta[3/2.\cos\varphi \ - \sqrt{3}/2.\mathrm{sen}\,\varphi - j.(\sqrt{3}/2.\cos\varphi + 3/2.\mathrm{sen}\,\varphi)\ ] =$$

$$= \sqrt{3}.I'_\Delta[\sqrt{3}/2.\cos\varphi - \tfrac{1}{2}.\mathrm{sen}\,\varphi - j(\tfrac{1}{2}.\cos\varphi + \sqrt{3}/2.\mathrm{sen}\,\varphi\ ] =$$

$$= \sqrt{3}.\ I'_\Delta[\cos(30^o+ \varphi) - j.\mathrm{sen}\,(30^o +\varphi)\ ] = \sqrt{3}.\ I'_\Delta\angle -(30^o+\varphi)$$

$$\bar{I}_{2\Delta} = \sqrt{3}.\ I'_\Delta\angle 330^o-\varphi \qquad (19.15)$$

Por último:

$$\bar{I}_{3\Delta} = \bar{I}'_{2\Delta} - \bar{I}'_{1\Delta} = I'_{\Delta}\angle 240^{o}\text{-}\varphi - I'_{\Delta}\angle\text{-}\varphi = I'_{\Delta}[\ 1\angle 240^{o}\text{-}\varphi\ - 1\angle\text{-}\varphi\ ] =$$

$$= I'_{\Delta}\,[\cos(240^{o}\text{-}\varphi) + j.\mathrm{sen}\,(240^{o} - \varphi) - \cos(\ -\varphi) - j.\mathrm{sen}\,(\ -\varphi)] =$$

$$= I'_{\Delta}[-½\cos\varphi - \sqrt{3}/2.\mathrm{sen}\,\varphi + j.(-\sqrt{3}/2.\cos\varphi + ½.\mathrm{sen}\,\varphi) - \cos\varphi + j.\mathrm{sen}\,\varphi] =$$

$$= I'_{\Delta}[\ -3/2.\cos\varphi\ - \sqrt{3}/2.\mathrm{sen}\,\varphi - j.(\sqrt{3}/2.\cos\varphi - 3/2.\mathrm{sen}\,\varphi)] =$$

$$= \sqrt{3}.\ I'_{\Delta}[-\sqrt{3}/2.\cos\varphi - ½.\mathrm{sen}\,\varphi + j.(-½.\cos\varphi + \sqrt{3}/2.\mathrm{sen}\,\varphi\ ] =$$

$$= \sqrt{3}.\ I'_{\Delta}[\cos(210^{o} - \varphi\ ) + j.\mathrm{sen}\,(210^{o} - \varphi)\ ]$$

$$\bar{I}_{3\Delta} = \sqrt{3}.\ I'_{\Delta}\angle 210^{o}\text{-}\varphi \qquad (19.16)$$

Las expresiones complejas de las intensidades que absorbe de la línea un receptor trifásico equilibrado, conectado en triángulo, de acuerdo con (19.14), (19.15) y (19.16) son:

$$\bar{I}_{1\Delta} = \sqrt{3}.\ I'_{\Delta}\angle 90^{o}\text{-}\varphi$$

$$\bar{I}_{2\Delta} = \sqrt{3}.\ I'_{\Delta}\angle 330^{o}\text{-}\varphi \qquad (19.17)$$

$$\bar{I}_{3\Delta} = \sqrt{3}.\ I'_{\Delta}\angle 210^{o}\text{-}\varphi$$

Y están desfasadas entre sí 120º.

Si el mismo receptor estuviese conectado en estrella, las intensidades que tomaría de la línea serían:

$$\bar{I}_{1Y} = I'_{Y}\angle 90^{o}\text{-}\varphi$$

$$\bar{I}_{2Y} = I'_{Y}\angle 330^{o}\text{-}\varphi \qquad (19.18)$$

$$\bar{I}_{3Y} = I'_{Y}\angle 210^{o}\text{-}\varphi$$

Están desfasadas, también entre sí 120º.

Por tanto las expresiones (19.17) y (19.18) demuestran que están en fase. Esta es una cuestión importante ya que, la situación en el diagrama vectorial de las intensidades que toma de la línea un receptor trifásico equilibrado, no depende del tipo de conexión, sino de su factor de potencia. En cuanto al módulo, según (19.11), en triángulo es tres mayor que en estrella.

La relación que deben cumplir las impedancias de dos receptores equilibrados; uno en estrella y otro en triángulo, para que absorban la misma intensidad de línea, será:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

En efecto:

$$I_Y = I'_Y = \frac{U'}{Z_Y} = \frac{U}{\sqrt{3}}.\frac{1}{Z_Y} \quad ; \quad I_\Delta = \sqrt{3}.I'_\Delta = \sqrt{3}.\frac{U}{Z_\Delta}$$

Pero se impone la condición que $I_Y = I_\Delta$, por tanto:

$$\frac{U}{\sqrt{3}}.\frac{1}{Z_Y} = \sqrt{3}.\frac{U}{Z_\Delta} \quad ; \quad Z_\Delta = 3.Z_Y \quad c.q.d.$$

Es decir, un receptor equilibrado en estrella se puede sustituir por otro equilibrado en triángulo, siempre que cada impedancia sea tres veces mayor.

19.5. TRANSFIGURACIÓN DE ESTRELLA EN TRIÁNGULO Y VICEVERSA.

Supongamos una línea trifásica a tres hilos, con orden de sucesión de fases 1,2,3, en sistema equilibrado directo. En dicha línea está conectado un sistema de impedancias Z_1, Z_2 y Z_3, en estrella. Se demuestra que, sin modificar la intensidad que toma de cada hilo de la línea dicho receptor, se puede sustituir por otro sistema de impedancias conectadas en triángulo, convenientemente elegidas.

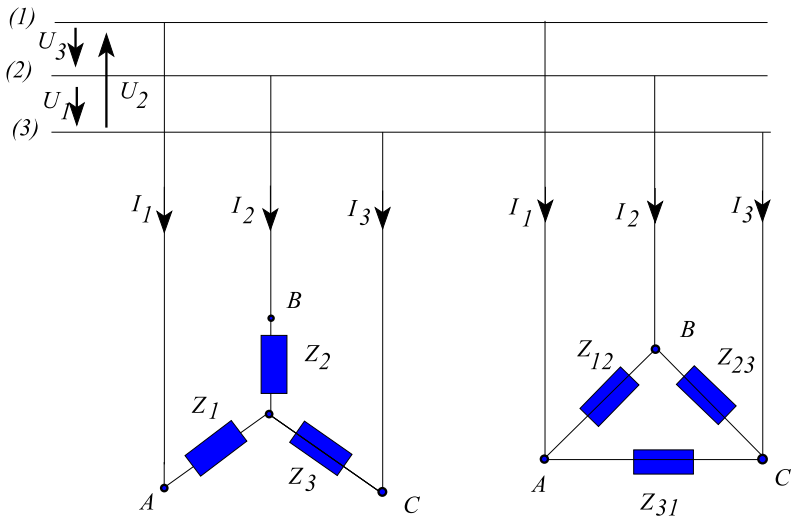


Fig.19.7

En el circuito en estrella se verifica:

$$\begin{array}{ll} \bar{U}_1 = \bar{U}'_2 - \bar{U}'_3 & \bar{U}'_1 = \bar{I}_1 . \bar{Z}_1 \\ \bar{U}_2 = \bar{U}'_3 - \bar{U}'_1 & \bar{U}'_2 = \bar{I}_2 . Z_2 \\ \bar{U}_3 = \bar{U}'_1 - \bar{U}'_2 & \bar{U}'_3 = \bar{I}_3 . Z_3 \end{array} \qquad (19.19)$$

En el circuito en triángulo, se verifica:

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_{23}} \quad ; \quad \bar{J}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_{31}} \quad ; \quad \bar{J}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_{12}} \qquad (19.20)$$

Siendo $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ y $\bar{J}_3$, las intensidades que circulan por las impedancias $\bar{Z}_{23}$, $\bar{Z}_{31}$ y $\bar{Z}_{12}$, respectivamente.

Las intensidades que toma de la línea el receptor en triángulo son:

$$\begin{array}{ll} \bar{I}_1 = \bar{J}_3 - \bar{J}_2 & \bar{I}_1 = \bar{U}_3/\bar{Z}_{12} - \bar{U}_2/\bar{Z}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{J}_1 - \bar{J}_3 & \bar{I}_2 = \bar{U}_1/\bar{Z}_{23} - \bar{U}_3/\bar{Z}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{J}_2 - \bar{J}_1 & \bar{I}_3 = \bar{U}_2/\bar{Z}_{31} - \bar{U}_1/\bar{Z}_{23} \end{array} \qquad (19.21)$$

De acuerdo con el circuito de la Fig. 19.7, puede plantearse el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} \bar{U}_2 = -\bar{Z}_1.\bar{I}_1 + \bar{Z}_3.\bar{I}_3 \\ \bar{U}_3 = \bar{Z}_1.\bar{I}_1 - \bar{Z}_2.\bar{I}_2 \\ 0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \end{array} \qquad (19.22)$$

Del sistema (19.22) despejando I_1, se obtiene:

$$\bar{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{U}_2 & 0 & \bar{Z}_3 \\ \bar{U}_3 & -\bar{Z}_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\bar{Z}_1 & 0 & \bar{Z}_3 \\ \bar{Z}_1 & -\bar{Z}_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\bar{U}_2.\bar{Z}_2 + \bar{U}_3.\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1.\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1.\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2.\bar{Z}_3} \qquad (19.23)$$

Como las intensidades, en estrella y en triángulo, que toman los dos receptores trifásicos tienen que ser iguales, la primera ecuación de (19.21) y la ecuación (19.23) también lo serán, en consecuencia:

$$\frac{\overline{U}_3}{\overline{Z}_{12}} - \frac{\overline{U}_2}{\overline{Z}_{31}} = \overline{U}_3 . \frac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1.\overline{Z}_2 + \overline{Z}_1.\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2.\overline{Z}_3} - \overline{U}_2 . \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1.\overline{Z}_2 + \overline{Z}_1.\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2.\overline{Z}_3} \qquad (19.24)$$

Operando (19.24), resulta:

$$\frac{1}{\overline{Z}_{12}} = \frac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1.\overline{Z}_2 + \overline{Z}_1.\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2.\overline{Z}_3} \quad ; \quad \frac{1}{\overline{Z}_{31}} = \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1.\overline{Z}_2 + \overline{Z}_1.\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2.\overline{Z}_3} \qquad (19.25)$$

Por permutación circular se obtiene:

$$\frac{1}{\overline{Z}_{23}} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1.\overline{Z}_2 + \overline{Z}_1.\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2.\overline{Z}_3} \qquad (19.26)$$

En forma de admitancia, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\overline{Y}_{12} = \frac{\overline{Y}_1.\overline{Y}_2}{\overline{Y}_1+\overline{Y}_2+\overline{Y}_3}$$

$$\overline{Y}_{31} = \frac{\overline{Y}_3.\overline{Y}_1}{\overline{Y}_1+\overline{Y}_2+\overline{Y}_3} \qquad (19.27)$$

$$\overline{Y}_{23} = \frac{\overline{Y}_2.\overline{Y}_3}{\overline{Y}_1+\overline{Y}_2+\overline{Y}_3}$$

También se puede realizar la transfiguración inversa, es decir, las tres impedancias $\mathbf{Z}_{12}$, $\mathbf{Z}_{31}$ y $\mathbf{Z}_{23}$, conectadas en triángulo de la Fig.19.7, se pueden transfigurar en las $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$, que se representan en la citada figura. La condición, igual que en el caso anterior, es que las intensidades que toman de la línea ambos receptores sean iguales.

En la Fig.19.7, las impedancias entre los vértices **A** y **B**, son:

a) En estrella : $\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$

b) En triángulo: $\overline{Z}_{12}$ en paralelo con $(\overline{Z}_{31} + \overline{Z}_{23})$, es decir:

$$\frac{\overline{Z}_{12}.(\overline{Z}_{31} + \overline{Z}_{23})}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}}$$

Como ambas impedancias tienen que ser iguales, por la condición impuesta de absorber la misma intensidad de la línea, se verifica:

$$\frac{\overline{Z}_{12}.(\overline{Z}_{31} + \overline{Z}_{23})}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 \qquad (19.28)$$

$$\frac{\overline{Z}_{31}.(\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23})}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_3 \qquad (19.29)$$

$$\frac{\overline{Z}_{23}.(\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{31})}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}} = \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3 \qquad (19.30)$$

Se puede formar un sistema de ecuaciones, con el siguiente criterio:

1º) (19.28) + (19.29) - (19.30):

$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{Z}_{12}.\overline{Z}_{31}}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}} \qquad (19.31)$$

2º) (19.28) + (19.30) - (19.29):

$$\overline{Z}_2 = \frac{\overline{Z}_{12}.\overline{Z}_{23}}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}} \qquad (19.32)$$

3º) (19.29) + (19.30) - (19.28):

$$\overline{Z}_3 = \frac{\overline{Z}_{23}.\overline{Z}_{31}}{\overline{Z}_{12} + \overline{Z}_{23} + \overline{Z}_{31}} \qquad (19.33)$$

Las expresiones (19.31), (19.32) y (19.33) permiten pasar de una conexión en triángulo a una estrella equivalente.

En particular, si se trata de un receptor en triángulo equilibrado, se verifica:

$$\overline{Z}_{12} = \overline{Z}_{23} = \overline{Z}_{31} = \overline{Z}_{\Delta}$$

El receptor en estrella equivalente será también un receptor equilibrado. En efecto, las impedancias valdrán:

$$\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \overline{Z}_3 = \frac{\overline{Z}_{\Delta}}{3} \qquad (19.34)$$

La expresión (19.34) coincide con la que se había obtenido en el epígrafe anterior.