TEMA 20

POTENCIA EN SISTEMAS TRIFÁSICOS

20.1. POTENCIA DE LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS.

Llamando **u'** e **i'** a las tensiones e intensidades genéricas en el receptor, la potencia instantánea que absorbe un receptor trifásico está definida por la expresión:

$$p = \sum_{j=1}^{3} u'_j . i'_j \qquad (20.1)$$

La potencia media es:

$$P = \sum_{j=1}^{3} U'_j . I'_j . \cos\ (U'_j \widehat{\ } I'_j) \qquad (\varphi_j = U'_j \widehat{\ } I'_j) \qquad (20.2)$$

Esta expresión no puede emplearse directamente para determinar la potencia, ya que en algunos casos resulta imposible determinar **I'** o **U'**, y además **cos** $\varphi_{j\ (j=1,2,3)}$ no se obtiene con la suficiente aproximación.

A continuación se estudian las potencias en las conexiones trifásicas en estrella y en triángulo.

20.1.1. CONEXIÓN EN ESTRELLA.

Cuando un receptor está conectado a una línea trifásica, en estrella, los receptores monofásicos que lo constituyen, quedan conectados a las tensiones simples o estrelladas, y son recorridos por las intensidades de línea. La potencia eléctrica absorbida en cada instante, es la suma de las potencias absorbidas por los tres receptores monofásicos. De forma que:

$$p = \sum_{j=1}^{3} u'_j . i_j \qquad (20.3)$$

El valor medio de (20.3) es igual a la suma de los valores medios de las potencias monofásicas, es decir:

$$P = \sum_{j=1}^{3} U'_j.I_j.\cos(U'_j \hat{} I_j) \qquad U'_j \hat{} I_j = \varphi_{j\ (j=1,2,3)} \tag{20.4}$$

$$P = \sum_{j=1}^{3} U'_j.I_j.\cos\ \varphi_j \tag{20.5}$$

Suponiendo que se trate de un sistema equilibrado, se verifica:

$$U'_{j\ (j=1,2,3)} = U' \ ; \quad I_{j\ (j=1,2,3)} = I \ ; \quad \varphi_{j\ (j=1,2,3)} = \varphi$$

Luego (20.5) queda de la forma:

$$P = 3.U'.I.\cos\ \varphi \tag{20.6}$$

La expresión (20.6) indica que *la potencia total consumida por el receptor trifásico es tres veces mayor que la que se consume por fase*. Ahora bien, en el receptor equilibrado en estrella se cumple:

$$U' = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

Por tanto (20.6) se convierte en:

$$P = \sqrt{3}.U.I.\cos\ \varphi \tag{20.7}$$

Conviene resaltar que en la expresión (20.7) φ no es el ángulo que forman **U** e **I** (tensión e intensidad de línea).

20.1.2. CONEXIÓN EN TRIÁNGULO.

Cuando un receptor se conecta a una línea trifásica, en triángulo, los receptores monofásicos que lo constituyen quedan conectados a las tensiones de línea, y son recorridos por las intensidades simples. La potencia eléctrica absorbida en cada instante es la suma de las potencias absorbidas por los tres receptores monofásicos. Es decir:

$$p = \sum_{j=1}^{3} u_j.i'_j \tag{20.8}$$

La potencia media es:

$$P = \sum_{j=1}^{3} U_j.I'_j.\cos(U_j \hat{} I'_j) \qquad U_j \hat{} I'_j = \varphi_{j\ (j=1,2,3)} \tag{20.9}$$

$$P = \sum_{j=1}^{3} U_j.I'_j.\cos\ \varphi_j \qquad (20.10)$$

Suponiendo que se trate de un sistema equilibrado, se verifica:

$$I'_{j\ (j=1,2,3)} = I' \quad ; \quad U_{j\ (j=1,2,3)} = U \quad ; \quad \varphi_{j\ (j=1,2,3)} = \varphi$$

Luego (20.10) se reduce a:

$$P = 3.U.I'.\cos\ \varphi \qquad (20.11)$$

La expresión (20.11) indica que *la potencia total consumida por el receptor trifásico es tres veces mayor la que se consume por fase*. Ahora bien, en el receptor equilibrado en triángulo se cumple:

$$I' = \frac{I}{\sqrt{3}}$$

Por tanto (20.11) se convierte en:

$$P = \sqrt{3}.U.I.\cos\ \varphi \qquad (20.12)$$

Las expresiones (20.7) y (20.12), que definen la potencia absorbida por receptores equilibrados conectados en estrella y en triángulo, son iguales.

La relación que liga las potencias que absorben de la línea dos receptores de idénticas características; uno conectado en estrella y otro en triángulo es:

$$P_Y = \sqrt{3}.U.I_Y.\cos\ \varphi \quad ; \quad P_\Delta = \sqrt{3}.U.I_\Delta.\cos\ \varphi \qquad (20.13)$$

Dividiendo miembro a miembro (20.13), resulta:

$$\frac{P_Y}{P_\Delta} = \frac{I_Y}{I_\Delta} = \frac{1}{3} \quad ; \quad P_\Delta = 3.P_Y \qquad (20.14)$$

Es decir, *un receptor conectado en triángulo absorbe tres veces más potencia que si está conectado en estrella.*

20.2. SISTEMAS DE MEDIDA DE LA POTENCIA ACTIVA EN CIRCUITOS EQUILIBRADOS Y NO EQUILIBRADOS.

La potencia que absorbe un receptor trifásico es igual a la suma de las potencias que absorben los tres monofásicos que lo constituyen. Para medir esta potencia se pueden utilizar vatímetros monofásicos, con conexiones que dependen de las características del sistema a considerar.

20.2.1. SISTEMAS TRIFÁSICOS CON HILO NEUTRO.

La potencia media se define por la expresión:

$$P = \sum_{j=1}^{3} U'_j.I_j.\cos(U'_j \hat{} I_j) \qquad U'_j \hat{} I_j = \varphi_j \quad (j=1,2,3) \tag{20.15}$$

De acuerdo con (20.15), la potencia se puede evaluar mediante el uso de tres vatímetros monofásicos que tengan las bobinas voltimétricas conectadas a las tensiones simples y las amperimétricas recorridas por las intensidades de línea. Si los tres vatímetros miden potencias: $\mathbf{W_1}$, $\mathbf{W_2}$ y $\mathbf{W_3}$, la potencia total absorbida por el receptor trifásico será:

$$P = W_1 + W_2 + W_3 \tag{20.16}$$

Si el sistema es equilibrado, en Fig.20.1, se verifica:

$$W_1 = W_2 = W_3 = W$$

luego:

$$P = 3.W$$

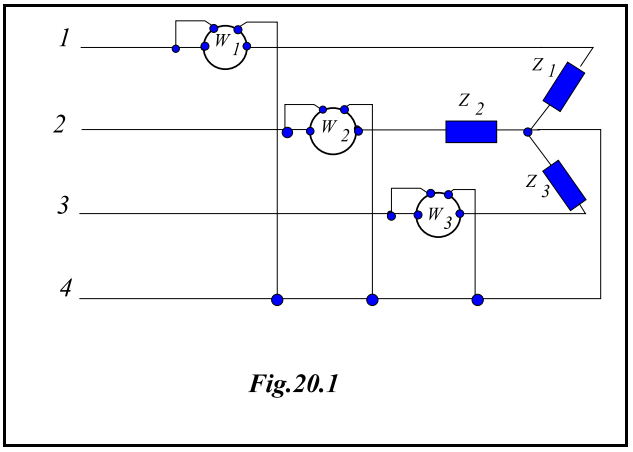


Fig.20.1

En este supuesto, se puede utilizar un sólo vatímetro, conectado en cualquiera de las tres posiciones de la Fig.20.1. Multiplicando por tres la lectura del vatímetro, se determina la potencia total que absorbe el sistema receptor.

Por ejemplo, si se toma la conexión del primer vatímetro de la Fig. 20.1, se tiene la conexión de la Fig. 20.2. La lectura de dicho vatímetro es la que sirve de base para evaluar la potencia absorbida por las tres impedancias idénticas $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$ y $\mathbf{Z_3}$.

$$P = 3.W$$

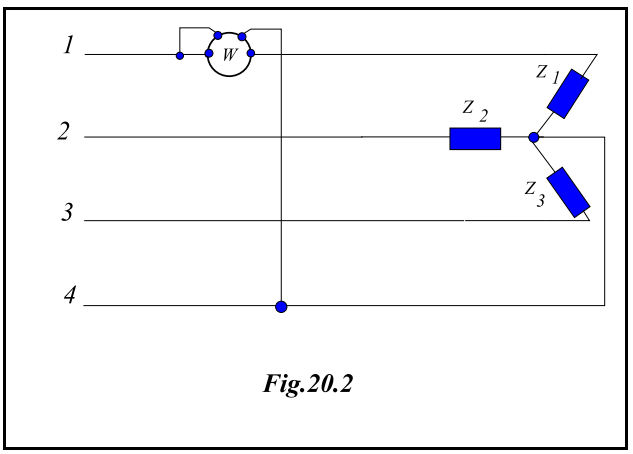


Fig.20.2

20.2.2. SISTEMAS TRIFÁSICOS SIN HILO NEUTRO.

Si el sistema receptor estuviese conectado en estrella con neutro accesible, se puede utilizar el esquema descrito en Fig. 20.1.

Si el receptor estuviese conectado en triángulo, la potencia media vendría definida por la expresión:

$$P = \sum_{j=1}^{3} U_j.I'_j.\cos(U_j^{\wedge}I'_j) \qquad U_j^{\wedge}I'_j = \varphi_j \ \ (j=1,2,3) \tag{20.17}$$

Y por tanto se requerirían tres vatímetros, de forma que sus bobinas voltimétricas estuviesen conectadas a las tensiones de línea, y las amperimétricas recorridas por las intensidades de los receptores. La potencia total absorbida por el receptor sería la suma de las potencias que marcasen los tres vatímetros monofásicos.

Si el sistema es equilibrado, las lecturas de los tres vatímetros son iguales:

$$W_1 = W_2 = W_3 = W$$

Luego se verifica:

$$P = 3.W$$

Es decir, la potencia total es tres veces la que marque cualquiera de los vatímetros de la Fig.20.3

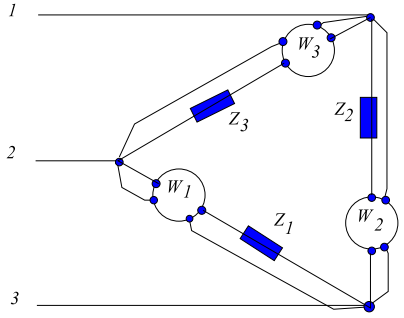


Fig.20.3

Esta conexión sólo es posible si las fases son accesibles. En caso contrario, es posible siempre la conexión de tres vatímetros según la Fig. 20.4.[1]

Es decir, con los circuitos amperimétricos intercalados en los hilos de la línea, y los voltimétricos conectados entre cada fase y un punto común **O**.

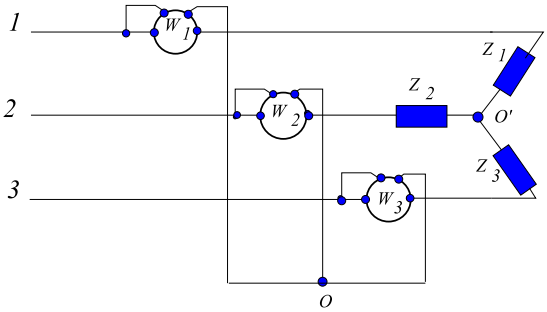


Fig.20.4

Este sistema de medida sirve tanto para circuitos equilibrados como desequilibrados.

[1]En este caso se formaría un neutro con las salidas de las bobinas voltimétricas

Para que las lecturas de los vatímetros de la Fig.20.4, se correspondan con los sumandos de la expresión:

$$P = \sum_{j=1}^{3} U'_j.I_j.\cos(U'_j \wedge I_j) \qquad U'_j \wedge I_j = \varphi_j \quad (j=1,2,3)$$

es preciso que dichos vatímetros tengan idénticas características. Sin embargo la suma de las lecturas de los vatímetros conectados según Fig.20.4, es siempre igual a la potencia total consumida por el receptor, aunque los tres vatímetros tengan distintas características. En efecto, por un lado el receptor puede considerarse conectado en estrella, ya que aunque estuviese en triángulo siempre se podría construir uno en estrella equivalente, y por otro lado si el punto **O** tuviese un potencial **u,** con respecto al punto neutro del receptor **O'**, las tensiones a las que quedarían conectadas las bobinas voltimétricas serían:

$$u'^*_j = u'_j - u \quad (j=1,2,3) \tag{20.18}$$

Las lecturas de los vatímetros se corresponderían con las expresiones:

$$W_j = \frac{1}{T}\int_0^T u'^*_j.i_j.dt = \frac{1}{T}\int_0^T (u'_j - u).i_j.dt$$

$$W_j = \frac{1}{T}\int_0^T u'_j.i_j.dt - \frac{1}{T}\int_0^T u.i_j.dt \tag{20.19}$$

$$(j=1,2,3)$$

La suma de las lecturas de los tres vatímetros, se obtienen a partir de (20.19):

$$W = \sum_{j=1}^{3} W_j = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=1}^{3} u'_j.i_j.dt - \frac{1}{T}\int_0^T u \sum_{j=1}^{3} i_j.dt$$

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=1}^{3} u'_j.i_j.dt = P \tag{20.20}$$

Ya que $\sum_{j=1}^{3} i_j = 0$, por no existir hilo neutro.

W es la potencia total consumida **P,** por el receptor.

20.3. MÉTODO DE LOS DOS VATÍMETROS.

Los métodos descritos en los apartados anteriores se pueden simplificar utilizando el método de los dos vatímetros. Este método se puede utilizar; tanto en sistemas equilibrados, como en desequilibrados, con la condición necesaria y suficiente que sea un sistema a tres hilos.

Cualquier receptor o conjunto de receptores trifásicos se puede sustituir por un receptor equivalente conectado en estrella o en triángulo. Por tanto, la potencia consumida por un conjunto de receptores conectados a una línea trifásica a tres hilos se puede expresar de la forma:

$$p = \sum_{j=1}^{3} u'_j . i_j \qquad (20.21)$$

Por ser una línea con tres hilos, se verifica:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Se puede despejar una de las intensidades y sustituirla en (20.21), por ejemplo $\mathbf{i}_3$:

$$i_3 = -i_1 - i_2 \quad ; \quad p = u'_1 . i_1 + u'_2 . i_2 - u'_3 . (i_1 + i_2) = i_1 . (u'_1 - u'_3) + i_2 . (u'_2 - u'_3)$$

Teniendo en cuenta las relaciones que existen entre las tensiones simples y las compuestas, la expresión (20.22), se puede escribir de la forma:

$$p = u_1 . i_2 + (-u_2) . i_1 \qquad (20.23)$$

El valor medio de (20.23) es:

$$P = U_1 . I_2 . \cos(U_1 \hat{} I_2) + U_2 . I_1 . \cos(-U_2 \hat{} I_1) \qquad (20.24)$$

Si conectásemos dos vatímetros según (20.24), la suma de sus lecturas nos daría la potencia total que absorbe el sistema receptor.

Las lecturas de los vatímetros de la Fig.20.5 coinciden con los sumandos de (20.24), es decir:

$$W_1 = U_1 . I_2 . \cos(U_1 I_2)$$

$$W_2 = U_2 . I_1 . \cos(-U_2 I_1)$$

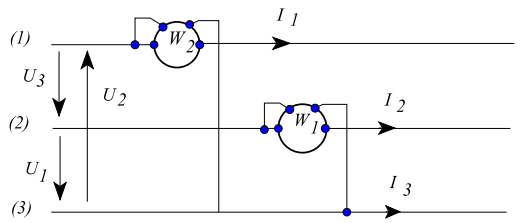


Fig.20.5

Luego la suma de sus lecturas será igual a la potencia total absorbida por los receptores.

$$P = W_1 + W_2$$

Si en vez de eliminar $\mathbf{i}_3$, hubiésemos eliminado $\mathbf{i}_1$ o $\mathbf{i}_2$, obtendríamos las siguientes expresiones:

$$P = U_2.I_3.\cos(U_2 I_3) + U_3.I_2.\cos(-U_3 I_2)$$

(20.25)

$$P = U_3.I_1.\cos(U_3 I_1) + U_1.I_3.\cos(-U_1 I_3)$$

Que se corresponderían con las conexiones de la Fig.20.6:

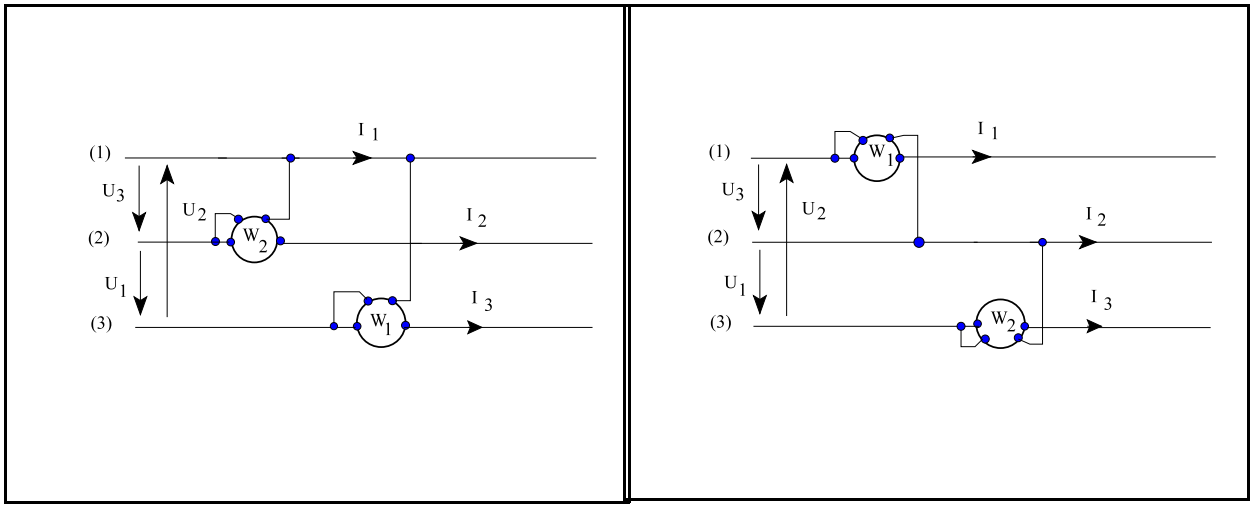


Fig.20.6

Considerando las expresiones (20.24) y (20.25) que se corresponden con las conexiones de las figuras 20.5 y 20.6, podemos enunciar el siguiente método (para evaluar la potencia activa que absorbe un receptor o conjunto de receptores conectados a una línea trifásica, a tres hilos): *La potencia activa absorbida de una línea trifásica con tres hilos, por un receptor o conjunto de receptores trifásicos sean o no equilibrados, se puede evaluar mediante la instalación de dos vatímetros monofásicos, conectados de forma que las bobinas amperimétricas vayan intercaladas en dos cualesquiera de los hilos, y las voltimétricas en derivación entre cada uno de los hilos a los que van conectadas las amperimétricas, y el tercero.*

En él supuesto que el sistema receptor sea equilibrado, las expresiones que determinan las lecturas de los vatímetros quedan de la siguiente forma:

$$P = W_1 + W_2 = U.I.\cos(30^o+\varphi) + U.I.\cos(30^o-\varphi) \qquad (20.26)$$

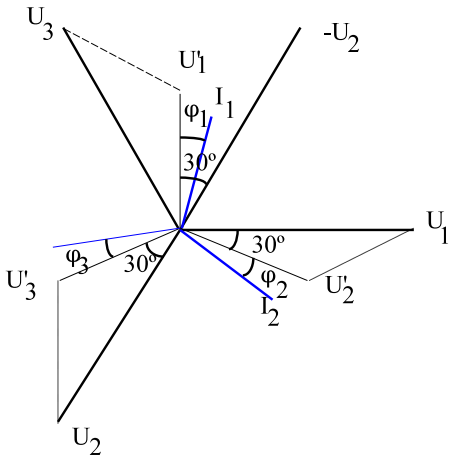


Fig.20.7

Ya que las lecturas de los vatímetros serían:

$$W_1 = U_1.I_2.\cos(U_1^{\wedge}I_2) \quad ; \quad U_1^{\wedge}I_2 = 30^o + \varphi_2$$
$$W_2 = U_2.I_1.\cos(-U_2^{\wedge}I_1) \quad ; \quad -U_2^{\wedge}I_1 = 30^o - \varphi_1 \qquad (20.27)$$

Y por tratarse de un sistema equilibrado, se verifica:

$$I_1=I_2=I_3=I \quad ; \quad \varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi \quad ; \quad U_1=U_2=U_3=U$$

La suma, es la potencia que absorbe el receptor o conjunto de receptores equilibrados:

$$P = 2.U.I.\cos 30^o.\cos\varphi = \sqrt{3}.U.I.\cos\varphi \qquad (20.28)$$

En función de **cos** φ, se pueden considerar una serie de casos particulares, siempre que se trate de receptores equilibrados:

1º.- $\varphi = 0^o$

Es decir, se trata de un receptor no inductivo. En este caso, las indicaciones de los vatímetros son:

$$W_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.U.I \quad ; \quad W_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.U.I \qquad (20.29)$$

Los dos vatímetros marcan lo mismo, por lo tanto se puede prescindir de uno de ellos. La potencia activa se puede determinar multiplicando por dos la indicación de uno de los vatímetros, conectado en cualquiera de las seis posibles formas que se han descrito en el método de los dos vatímetros.

2º.- $\varphi = 60^o$

Se trata de un receptor inductivo. En este caso las lecturas de los dos vatímetros son:

$$W_1 = U.I.\cos 90^o = 0 \quad ; \quad W_2 = U.I.\cos(-30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}.U.I$$

Uno de los vatímetros marca cero, y otro toda la potencia activa que absorbe el receptor.

Es de resaltar que la potencia que absorbe este receptor es la mitad que tomaba el receptor del caso 1º.

3º.- $\varphi = -60^o$

Se trata de un receptor capacitivo. En este caso las lecturas de los vatímetros son:

$$W_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.U.I \quad ; \quad W_2 = 0$$

El que marca cero ahora, es el $\mathbf{W_2}$. La potencia que absorbe el receptor es la misma que en el caso anterior.

4º.- $\varphi > 60^o$

Se trata de un receptor inductivo. En este caso:

$$W_1 < 0 \quad ,ya\ que\ \cos(30^o + \varphi) < 0$$

La potencia que marca el primer vatímetro es negativa, por tanto la aguja tenderá a desplazarse a la izquierda del cero de la escala. Si existiese un tope que impidiera el desplazamiento de la aguja, habría que invertir una cualquiera de las conexiones del vatímetro, la amperimétrica o la voltimétrica. La potencia total absorbida sería, en este caso:

$$P = W_2 - W_1$$

5º.- $\varphi < -60^o$

Se trata de un receptor capacitivo. En este caso tendríamos que hacer la misma operación que en el caso anterior, pero con el vatímetro $\mathbf{W_2}$**.** La potencia total absorbida por el receptor será:

$$P = W_1 - W_2$$

El factor de potencia, del sistema receptor equilibrado, se puede determinar fácilmente mediante el uso de dos vatímetros monofásicos conectados según el método de los dos vatímetros.

En efecto se verifica:

$$W_1 + W_2 = \sqrt{3}.U.I.\cos\varphi \qquad (20.29)$$

$$W_2 - W_1 = U.I.sen\ \varphi \qquad (20.30)$$

Por tanto:

$$tang\ \varphi = \sqrt{3}.\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{W_1 + W_2}{2.\sqrt{W_1^2 + W_2^2 - W_1.W_2}} \qquad (20.31)$$

20.4. MEDIDA DE LA POTENCIA REACTIVA EN SISTEMAS TRIFÁSICOS.

Si se trata de un sistema equilibrado, la potencia reactiva viene dada por la expresión:

$$Q = \sqrt{3}.U.I.sen\ \varphi \qquad (20.32)$$

En estos sistemas, la potencia reactiva puede obtenerse multiplicando por $\sqrt{3}$ la diferencia de las lecturas de dos vatímetros, conectados según el método de los dos vatímetros. En efecto según se desprende de (20.30):

$$Q = \sqrt{3}.(W_2 - W_1) \qquad (20.33)$$

En sistemas equilibrados, la potencia reactiva puede medirse mediante el uso de un sólo vatímetro, conectado según se indica en la Fig. 20.8.

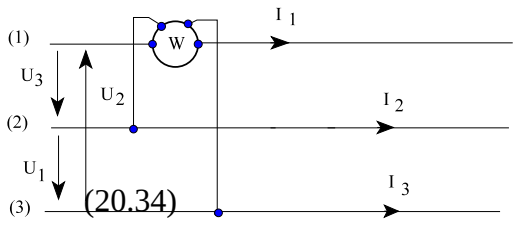


Fig.20.8

En efecto, la lectura del vatímetro es:

$$W = U_1.I_1.\cos\ (\hat{U_1}\ I_1) \qquad (20.34)$$

Ahora bien, el desfase entre $\mathbf{U}_1$ e $\mathbf{I}_1$ es $\mathbf{90^o}$ - φ_1, por tanto:

$$W = U_1.I_1.sen\ \varphi_1 \qquad (20.35)$$

Por tratarse de sistemas equilibrados, se cumple:

$$U_1=U_2=U_3=U \quad ; \quad I_1=I_2=I_3=I \quad ; \quad \varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi$$

Luego la lectura del vatímetro (20.35), se reduce a:

$$W = U.I.sen\,\varphi \qquad (20.36)$$

La potencia reactiva del sistema la obtenemos multiplicando por $\sqrt{3}$, la lectura del vatímetro, es decir:

$$Q = \sqrt{3}.W \qquad (20.37)$$

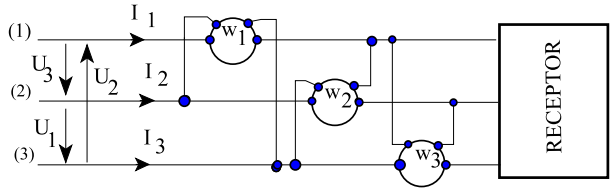


Fig.20.9

La medida de la potencia reactiva de un sistema receptor desequilibrado unido a una línea a tres hilo, con tensiones equilibradas, se puede realizar mediante el empleo de tres vatímetros con las conexiones que se especifican en la Fig.20.9.

Las lecturas de los vatímetros de la Fig.28.9 son:

$$W_1 = U_1.I_1.\cos(\hat{U_1 I_1}) = U_1.I_1.\cos(90^o - \varphi_1) = U_1.I_1.sen\varphi_1$$

$$W_2 = U_2.I_2.\cos(\hat{U_2 I_2}) = U_2.I_2.\cos(90^o - \varphi_2) = U_2.I_2.sen\varphi_2 \qquad (20.38)$$

$$W_3 = U_3.I_3.\cos(\hat{U_3 I_3}) = U_3.I_3.\cos(90^o - \varphi_3) = U_3.I_3.sen\varphi_3$$

Suponiendo que el receptor esté conectado en estrella (o el equivalente sea una estrella), la potencia reactiva que absorbería sería:

$$Q = U'_1.I_1.sen\varphi_1 + U'_2.I_2.sen\varphi_2 + U'_3.I_3.sen\varphi_3$$

$$Q = \frac{U_1}{\sqrt{3}}.I_1.sen\varphi_1 + \frac{U_2}{\sqrt{3}}.I_2.sen\varphi_2 + \frac{U_3}{\sqrt{3}}.I_3.sen\varphi_3$$

(20.39)

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}.(W_1 + W_2 + W_3)$$

Es decir, la potencia reactiva es **1/√3** veces la suma de las lecturas de los vatímetros conectados según se indica en la Fig.20.9.