TEMA 28

CÁLCULO MECÁNICO DE CABLES I

28.1 ECUACIÓN DE UN CABLE SOPORTADO ENTRE DOS PUNTOS FIJOS.

Supongamos que tenemos un cable **A-B** con un peso ***P***, que está tendido entre dos puntos **A** y **B** situados al mismo nivel (Fig.28.1).

Consideremos dos puntos, **P** y **Q** que distan una distancia ***dl***.

Los puntos **P** y **Q** están sometidos a tensiones $\mathbf{T_p}$ y $\mathbf{T_Q}$, respectivamente, y el elemento ***dl*** tiene una resultante exterior **F.dl**. siendo **F** la fuerza unitaria sobre el cable.

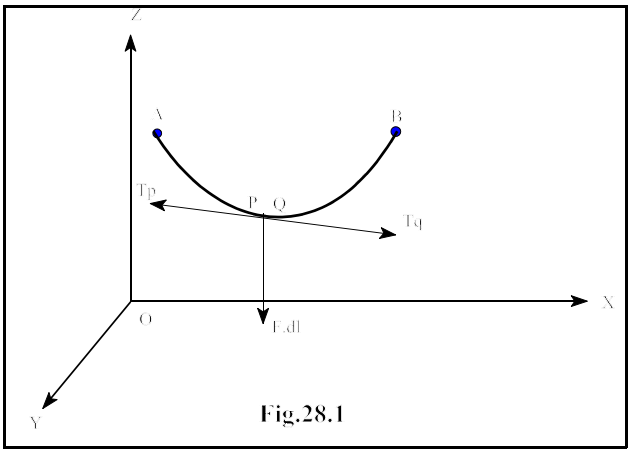


Fig.28.1

En el equilibrio de fuerzas se cumple:

$$\overline{T}_q - \overline{T}_p + \overline{F}.dl = 0 \qquad (28.1)$$

Donde:

$$\overline{T}_p = T_x.\bar{i} + T_y.\bar{j} + T_z.\bar{k}$$

$$\overline{T}_q = (T_x + dT_x).\bar{i} + (T_y + dT_y).\bar{j} + (T_z + dT_z).\bar{k} \qquad (28.2)$$

$$\overline{F} = F_x.\bar{i} + F_y.\bar{j} + F_z.\bar{k}$$

Sustituyendo las expresiones de (28.2) en (28.1) se obtiene:

$$(dT_x + F_x.dl).\bar{i} + (dT_y + F_y.dl).\bar{j} + (dT_z + F_z.dl).\bar{k} = 0 \qquad (28.3)$$

Para que se cumpla (28.3) tiene que verificarse que las tres compontes sean nulas, es decir se tiene que cumplir (28.4).

$$\left.\begin{aligned} dT_x + F_x.dl &= 0 \\ dT_y + F_y.dl &= 0 \\ dT_z + F_z.dl &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (28.4)$$

También:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT_x}{dl} + F_x &= 0 \\ \frac{dT_y}{dl} + F_y &= 0 \\ \frac{dT_z}{dl} + F_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (28.5)$$

Ahora bien, $\mathbf{T_P}$ es la tangente en **P** a la curva que dibuja el cable cuando se encuentra en equilibrio entre los puntos fijos **A** y **B**, por tanto se cumplirá:

$$\left.\begin{aligned} T_x &= T_p.\frac{dx}{dl} \\ T_y &= T_p.\frac{dy}{dl} \\ T_z &= T_p.\frac{dz}{dl} \end{aligned}\right\} \qquad (28.6)$$

Sustituyendo (28.6) en (28.4), resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(T_p.\frac{dx}{dl})}{dl} + F_x &= 0 \\ \frac{d(T_p.\frac{dy}{dl})}{dl} + F_y &= 0 \\ \frac{d(T_p.\frac{dz}{dl})}{dl} + F_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (28.7)$$

En el caso que se trate de un cable de sección uniforme, el peso por unidad de longitud tiene el mismo valor a lo largo de él, y por tanto la fuerza exterior que actúa sobre el cable es la debida a la acción de la gravedad. La curva dibujada por el cable, en el equilibrio, se encuentra en un plano

vertical que pasa por los puntos fijos **A** y **B**.

Si se supone que el viento ejerce una acción sobre el cable, aparecerá una nueva fuerza $\boldsymbol{P_v}$, que unida a la gravedad dará una resultante:

$$\overline{R} = \overline{P} + \overline{P}_v \qquad (28.8)$$

La curva que define el cable en este supuesto, está contenida en un plano que forma con la vertical un ángulo **α**, siendo:

$$tang\alpha = \frac{P_v}{P}$$

Suponiendo que solamente existe la acción de la gravedad, y tomando el eje **O-Z** como vertical ascendente, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} F_x = 0 \\ F_z = -P \end{array}\right\} \qquad (28.9)$$

Por tanto, si se sustituye (28.9) en (28.7) resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d(T_p.\dfrac{dx}{dl})}{dl} = 0 \\ \\ \dfrac{d(T_p.\dfrac{dz}{dl})}{dl} = P \end{array}\right\} \qquad (28.10)$$

Integrando (28.10), se obtiene:

$$T_p.\frac{dx}{dl} = K \;\; ; \;\; T_p = K.\frac{dl}{dx} \qquad (28.11)$$

$$\frac{d(K.\dfrac{dl}{dx}.\dfrac{dz}{dl})}{dl} = P \;\; : \;\; K.\frac{d}{dl}(\frac{dz}{dx}) = P \;\; ; \;\; K.\frac{dz'_x}{dl} = P$$

$$\frac{dz'_x}{dl} = \frac{P}{K} \qquad (28.12)$$

En el plano **X-Z**, que es donde se supone que está situada la curva definida por el cable, se verifica:

$$\vec{dl} = dx.\vec{i} + dz.\vec{k} \;\; ; \;\; dl = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + z'^2_x} \tag{28.13}$$

Sustituyendo (28.13) en (28.12) resulta:

$$\frac{dz'_x}{dx\sqrt{1 + z'^2_x}} = \frac{P}{K}$$

$$\frac{dz'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x}} = \frac{P}{K}.dx \tag{28.14}$$

Para resolver (28.14) se hace el cambio:

$$h = \frac{K}{P} \;\; ; \;\; z'_x = u$$

Con lo que la ecuación diferencial (28.14) resulta:

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{h} \tag{28.15}$$

Integrando (28.15) se obtiene la solución:

$$Senh^{-1}u = \frac{x - x_0}{h} \tag{28.16}$$

Si se particulariza la ecuación (28.16) para el vértice de la curva, se obtiene:

$$u_v = 0 \;\; ; \;\; 0 = \frac{x_v - x_0}{h}$$

Ya que la tangente en **v** a la curva es paralela al plano **X-Y**.

Si además, se hace un cambio de ejes de forma que el origen de coordenadas coincida con el punto (x_0, z_0), se tiene:

$$x_0 = 0 \;\; por\ tanto \; x_v = 0$$

La ecuación (28.16) se puede expresar de la forma:

$$u = Senh(\frac{x}{h}) \tag{28.17}$$

O bien:

$$z'_x = Senh(\frac{x}{h}) \tag{28.18}$$

Integrando (28.18), resulta:

$$z = h.Cosh(\frac{x}{h}) \tag{28.19}$$

La ecuación (28.19) se corresponde con una catenaria. Por tanto la curva que dibuja un cable suspendido entre dos puntos fijos y sometido a la acción de la gravedad, en el equilibrio, es *una catenaria*.

Teniendo en cuenta la traslación de ejes, para $\mathbf{x = 0}$ resulta $\mathbf{z_v = h}$, según (28.19).

Teniendo en cuenta (28.13), se obtiene:

$$dl = \sqrt{1 + u^2}.dx \tag{28.20}$$

Pero de acuerdo con (28.17) resulta:

$$dl = \sqrt{1 + Senh^2(\frac{x}{h})}.dx = Cosh(\frac{x}{h}).dx \tag{28.21}$$

Integrando (28.21), se obtiene:

$$(l - l_0) = h.Senh(\frac{x}{h}) \tag{28.22}$$

Tomando el origen de arcos de forma que coincida con el vértice de la catenaria, la ecuación (28.22) se reduce a:

$$(0 - l_0) = 0 \quad ; \quad l_0 = 0$$

Por tanto (28.22) en esta nueva traslación se puede expresar de la forma:

$$l = h.Senh(\frac{x}{h}) \qquad (28.23)$$

En la Fig.28.2 se ha representado la curva **A-B** en el plano **X-Z**.

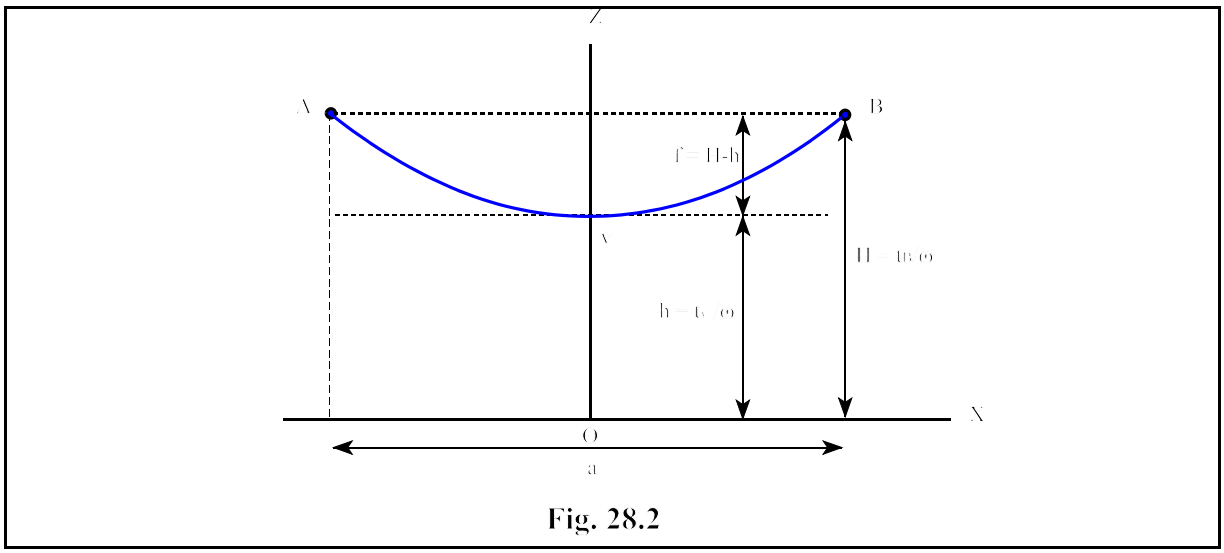


Fig. 28.2

En la Fig. 28.2, se considera:
t_v = Tensión en el vértice de la catenaria (kg.mm^{-2}).
t_B = Tensión en el punto B (kg.mm^{-2}).
ω = Peso unitario del cable (kg.mm^{-2}.m^{-1})
a = Vano A-B (m)
H = Distancia desde A o B al plano X-Y (m)

La ecuación (28.11) particularizada para el vértice, se puede expresar de la forma:

$$T_x.\frac{dx}{dl} = K = h.P \qquad (28.24)$$

Si en (28.24) se consideran las fuerzas unitarias, se obtiene:

$$t_v = h.\omega \qquad (28.25)$$

La ecuación (28.24) particularizada para el punto **B**, resulta:

$$t_B.\frac{dx}{dl} = h.\omega \quad ; \quad t_B = h.\omega.\frac{dl}{dx} \qquad (28.26)$$

Ahora bien, según (28.21):

$$\frac{dl}{dx} = Cosh(\frac{x}{h})$$

Haciendo **x = a/2**, según se desprende de la Fig.28.2, resulta:

$$h.\frac{dl}{dx} = h.Cosh(\frac{a}{2h}) \qquad (28.27)$$

Sustituyendo (28.27) en (28.26), resulta:

$$t_B = \omega.h.Cosh(\frac{a}{2h})$$

Pero:

$$H = h.Cosh(\frac{a}{2h}) \qquad (28.28)$$

Por tanto,[1]

$$t_B = H.\omega \qquad (28.29)$$

La flecha del cable tendido entre **A y B** es:

$$f = H - h = h.Cosh(\frac{a}{2h}) - h = h.[Cosh(\frac{a}{2h}) - 1] \qquad (28.30)$$

Y se define como la máxima distancia en la vertical entre la recta que une los puntos **A** y **B**, y el cable.

Con objeto de simplificar los cálculos, se puede utilizar la parábola en vez de la catenaria. Esto es posible cuando la relación **x/h** no sea muy grande[2].

En él supuesto que la simplificación apuntada anteriormente no fuese posible, será preciso resolver el problema utilizando la ecuación de la catenaria.

28.2. CÁLCULO DE VANOS UTILIZANDO LA ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA.

[1] De acuerdo con (28.25) y (28.29) la tensión en el cable es mínima en el punto medio del vano (vértice de la catenaria) y máxima en los extremos A o B (puntos de soporte del cable).

[2]Por lo general, en líneas aéreas la flecha tiene un valor inferior al 2% de la longitud del vano y por ello la diferencia entre las tensiones en lo extremos del vano y en el vértice de la catenaria se considera despreciable, en consecuencia las tensiones son las mismas en los distintos puntos de la curva, y que estas son iguales al valor que toma en el vértice, para el cual la flecha es máxima.

Sustituyendo la catenaria por la parábola, con vanos menores de 300 metros y flechas menores del 6% del vano, el error que se comete en el cálculo de la flecha es del orden del 0,5 %.

Como se ha mencionado con anterioridad la determinación de las tensiones y flechas de una línea depende de una serie de factores como son:

* Tipo de apoyo.
* Tipo de conductor.
* Desniveles del terreno.
* Tipos de aisladores y crucetas.
* Tensión a la que se realiza la transmisión.
* Número de conductores por fase.

Los anteriores factores son muy diversos, y determinarán en cada caso el método más adecuado para el cálculo de tensiones y flechas; no obstante, se puede afirmar que en la gran mayoría de las líneas las flechas son pequeñas si se comparan con los vanos, de forma que se puede decir sin incurrir en mucho error que, la longitud del conductor es casi igual a la del vano en el que está comprendido.

Todo esto permite establecer un método de cálculo basado en considerar que la curva que define un cable suspendido entre dos puntos es una parábola, en vez de la catenaria.

28.2.1. ECUACIÓN DE CAMBIO DE CONDICIONES.

Las ecuaciones (28.19) y (28.23) se pueden desarrollar en serie.

$$z = h.Cosh(\frac{x}{h}) = h.(1 + \frac{x^2}{2!h^2} + \frac{x^4}{4!h^4} + ...)$$

$$l = h.Senh(\frac{x}{h}) = h.(\frac{x}{h} + \frac{x^3}{3!h^3} + \frac{x^5}{5!h^5} + ...)$$

Pero según (28.25):

$$h = \frac{t_v}{\omega}$$

Por tanto las ecuaciones (28.31) se pueden expresar como:

$$z = \frac{t_v}{\omega}.(1 + \frac{x^2.\omega^2}{2!t_v^2} + \frac{x^4.\omega^4}{4!t_v^4} + ...)$$

$$l = \frac{t_v}{\omega}.(\frac{x.\omega}{t_v} + \frac{x^3.\omega^3}{3!t_v^3} + \frac{x^5.\omega^5}{5!t_v^5} + ...) \qquad (28.32)$$

Operando (21.32) resulta:

$$z = \frac{t_v}{\omega} + \frac{x^2.\omega}{2!t_v} + \frac{x^4.\omega^3}{4!t_v^3} + \ldots\ldots$$

$$l = x + \frac{x^3.\omega^2}{3!t_v^2} + \frac{x^5.\omega^4}{5!t_v^4} + \ldots\ldots \qquad (28.33)$$

A partir de estas ecuaciones se pueden obtener los valores de la flecha y la longitud entre los puntos **A** y **B**, que designaremos como **f** y **L** = 2l, respectivamente. Para ello utilizaremos solamente los dos primeros términos del desarrollo de (28.33). Por tanto:

$$f = H - h = \frac{t_v}{\omega} + \frac{x^2.\omega}{2!t_v} - \frac{t_v}{\omega} = \frac{x^2.\omega}{2.t_v} \qquad (28.34)$$

$$L = 2.l = 2.x + \frac{x^3.\omega^2}{3.t_v^2}$$

Pero según se desprende de la Fig.28.2 verifica que **x = a/2**, por tanto (28.34) se puede expresar como:

$$\left.\begin{array}{l} f = \dfrac{a^2.\omega}{8.t_v} \\ \\ L = a + \dfrac{a^3.\omega^2}{24.t_v^2} \end{array}\right\} \qquad (28.35)$$

La longitud, **L** de la catenaria se puede expresar a partir de (28.31), haciendo **x =a/2**:

$$L = 2.l = 2.h.Senh(\frac{a}{2h}) \qquad (28.36)$$

Pero $h = \frac{t_v}{\omega}$, por tanto (28.36) resulta:

$$L = 2.\frac{t_v}{\omega}.Senh(\frac{a.\omega}{2.t_v}) \qquad (28.37)$$

La ecuación de la parábola equivalente, según (28.31) es:

$$Z = h.(1 + \frac{x^2}{2.h^2}) = h + \frac{x^2}{2.h} \qquad (28.38)$$

Suponiendo que mientras se está tendiendo la línea no existan sobrecargas en los conductores, es preciso tener en cuenta las variaciones de temperatura que se produzcan mientras se realiza la operación de tendido. Por tanto, se establece una ecuación de *cambio de condiciones* que permite determinar, para cada longitud de vano, las tensiones que se producen con las diversas temperaturas, a partir de las cuales se determinarán los valores de las flechas respectivas.

La ecuación de cambio de condiciones se plantea a partir de los siguientes conceptos:

f = Flecha (m)
a = Vano (m)
L = Longitud de arco de parábola entre **A** y **B** (m).
t_v = Tensión en el vértice de la parábola ($kg.mm^{-2}$).
ω = Peso del cable, con sobrecarga de viento y manguito de hielo, en su caso ($kg.m^{-1}.mm^{-2}$).
α = Coeficiente de dilatación del cable.
E = Módulo de elasticidad del cable ($kg.mm^{-2}$).
θ_1 y θ_2 = Temperaturas del cable.
L_1 y L_2 = Longitudes del cable a θ_1 y θ_2, respectivamente.
t_1 y t_2 = Tensiones correspondientes a θ_1 y θ_2, respectivamente.

La variación en la longitud del cable $\mathbf{L_1 - L_2}$, correspondiente a las variaciones de temperatura, $\mathbf{\theta_2-\theta_1}$, y tensión $\mathbf{t_2-t_1}$, se puede expresar con arreglo a la *ley de Hooke*[3], mediante la ecuación:

$$L_2 - L_1 = L.\alpha.(\theta_2 - \theta_1) + L.\frac{t_2 - t_1}{E} \qquad (28.39)$$

Ahora bien, según (28.35) esta variación viene dada por la expresión:

$$L_2 - L_1 = \frac{a^3}{24}.(\frac{\omega_2^2}{t_2^2} - \frac{\omega_1^2}{t_2^2}) \qquad (28.40)$$

Por tanto igualando los segundos miembros de (28.39) y (28.40) resulta:

[3]Robert Hooke (1635-1703) Físico y astrónomo británico. Como físico se le debe la *ley de Hooke*, que establece que el alargamiento de un cuerpo elástico es proporcional a la tensión a la que se le somete. Fue el primero en utilizar la palabra célula (del latín *cellula* celdilla) que refiere a los huecos microscópicos del corcho. El término se aplicó luego a los seres vivos. Su obra *Micrographia. Some physiological descriptions of minute bodies* (Micrografía. Algunas descripciones fisiológicas de cuerpos diminutos, 1665) contiene dibujos de las observaciones por él realizadas.

$$L.\alpha.(\theta_2 - \theta_1) + L.\frac{t_2 - t_1}{E} = \frac{a^3}{24}.(\frac{\omega_2^2}{t_2^2} - \frac{\omega_1^2}{t_2^2}) \qquad (28.41)$$

En el supuesto de vanos pequeños, se puede suponer que **L** es aproximadamente igual a **a**, por lo que la ecuación (28.41) se reduce a:

$$\alpha.(\theta_2 - \theta_1) + \frac{t_2 - t_1}{E} = \frac{a^2}{24}.(\frac{\omega_2^2}{t_2^2} - \frac{\omega_1^2}{t_2^2}) \qquad (28.42)$$

La ecuación (28.42) es de tercer grado en $\mathbf{t_1}$ o $\mathbf{t_2}$ y se resuelve por aproximaciones sucesivas. Esta ecuación permite calcular la tensión del hilo $\mathbf{t_2}$ en las condiciones de temperatura $\boldsymbol{\theta_2}$ y carga $\boldsymbol{\omega_2}$, si se conoce la correspondiente a $\mathbf{t_1}$ en condiciones $\boldsymbol{\theta_1}$ y $\boldsymbol{\omega_1}$.

A partir del conocimiento de la tensión $\mathbf{t_2}$, en unas condiciones dadas, se puede obtener la flecha mediante la ecuación (28.35).